С. Л. СОБОЛЕВ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

С. Л. СОБОЛЕВ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

Допущено Министерством высшего образования СССР в качестве учебника для студентов механико-математических и физико-математических факультетов государственных университетов

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1950 ЛЕНИНГРАД

11-5-2

Редактор *Л. А. Чудов.* Техн. редактор *М. Д. Кислиновская.*

Подписано к печати 31/X 1950 г. Бумага 60×92/16. 13,25 бум. л. 26,5 п. л. 28,77 уч.-изд. л. 43,424 тип. зн. в п. л. Т-07968. Тираж 8000 экз. Цена 10 р. Переплёт 2 р. Заказ № 1956.

4-я типография им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата при Совете Министров СССР. Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ.

Настоящее, второе, издание курса «Уравнений математической физики» подверглось значительной переработке по сравнению с первым изданием.

Переработка имела своей целью в основном устранение различных неудачных формулировок, исправление кое-каких неточностей или неровностей стиля и в отдельных местах затронула существо излагаемых вопросов.

Наиболее заметные изменения по сравнению с первым изданием состоят в значительном упрощении изложения теории кратных интегралов Лебега, в новом изложении теории интегральных уравнений с ядрами, имеющими небольшую особенность, и в более точном обосновании метода Фурье.

Материал лекции, посвящённой теории интегралов Лебега, по существу не относится к теории уравнений математической физики. К тому же в настоящее время имеется ряд изложений теории интегралов Лебега, на которые можно было бы сослаться. Автор, однако, счёл нужным сохранить эту лекцию и в новом издании, в значительно упрощённом виде, как для справочных целей, так и потому, что с точки зрения автора она содержит новый подход к теории интегралов Лебега, который может оказаться более доступным для некоторых категорий читателей.

При чтении книги эту лекцию можно выпустить, если принять на веру те результаты, на которые приходится ссылаться в дальнейшем.

Лекция, посвящённая методу Ритца, исключена из второго издания книги. Материал её стоит несколько особняком от остальных разделов, и, кроме того, в своем прежнем виде эта лекция не давала сколько-нибудь полного представления о вариационных методах в математической физике.

При подготовке второго издания автор стремился учесть ценные замечания, сделанные ему различными лицами, которым он выражает свою признательность. Особенно много весьма существенных указаний на имевшиеся в книге недостатки было сделано академиком В. И. Смирновым, которому автор приносит свою самую горячую благодарность.

С. Соболев

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ.

Эта книга составлена в результате переработки курса лекций, читанного автором в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова. Поэтому автор сохранил за отдельными лекциями их название. Этим объясняется и подбор материала, который был ограничен в объёме количеством лекционных часов.

Автор выражает свою глубокую благодарность акад. В. И. Смирнову, прочитавшему книгу в рукописи, за ряд весьма ценных замечаний, а также проф. В. В. Степанову за полезные указания.

С. Соболев

ЛЕКЦИЯ I.

ВЫВОДЫ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Предмет теории уравнений математической физики составляет изучение дифференциальных, интегральных и функциональных уравнений, описывающих различные явления природы. Точные рамки этой дисциплины, как это обычно бывает, определить довольно трудно. Кроме того, большое разнообразие вопросов, относящихся к уравнениям математической физики, не позволяет охватить их сколько-нибудь полно в университетском курсе. Содержание настоящей книги составляет лишь часть обширной теории уравнений математической физики. В неё вошло лишь то, что казалось нам наиболее важным для первоначального ознакомления с этой теорией.

Наш курс будет посвящён по преимуществу изучению уравнений в частных производных 2-го порядка с одной неизвестной функцией, в частности волнового уравнения, уравнения Лапласа и уравнения теплопередачи, обычно называемых классическими уравнениями математической физики.

Попутно мы разовьём необходимую теорию смежных вопросов.

§ 1. Формула Остроградского.

Прежде чем переходить к выводу тех уравнений математической физики, которыми мы будем в дальнейшем заниматься, напомним одну формулу интегрального исчисления, касающуюся преобразования поверхностных интегралов в объёмные.

Пусть $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ — три функции переменных x, y, z, заданные в некоторой области D и имеющие в ней непрерывные производные первого порядка по x, y и z.

Рассмотрим в D некоторую замкнутую поверхность S, которая состоит из конечного числа кусков с непрерывно меняющейся на них касательной плоскостью.

Такую поверхность называют *кусочно-гладкой*. Мы будем, кроме того, предполагать, что прямые, параллельные координатным осям, встречают её либо в конечном числе точек, либо имеют общим целый отрезок.

Рассмотрим интеграл

$$\iint_S [P\cos(nx)+Q\cos(ny)+R\cos(nz)]\,dS, \tag{I. 1}$$

где через $\cos(nx)$, $\cos(ny)$ и $\cos(nz)$ обозначены косинусы углов, составленных *внутренней нормалью* к поверхности S с осями координат, а dS — положительный элемент поверхности. Пользуясь векторными обозначениями, мы можем считать P, Q, R компонентами некоторого вектора, который обозначим одной буквой $\boldsymbol{T}$. Тогда

$$P\cos(nx)+Q\cos(ny)+R\cos(nz)=T_n,$$

где T_n — проекция вектора $\boldsymbol{T}$ на направление внутренней нормали.

Классическая теорема интегрального исчисления позволяет перейти от поверхностного интеграла (I. 1) к объёмному, распространённому на область D, ограниченную поверхностью S, удовлетворяющей перечисленным выше ограничениям. Мы будем иметь:

$$\iint_S [P\cos(nx)+Q\cos(ny)+R\cos(nz)]\,dS=$$
$$=-\iiint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

или в векторных обозначениях

$$\iint_S T_n\,dS=-\iiint_D \operatorname{div}\boldsymbol{T}\,dv, \tag{I. 2}$$

где dv обозначает дифференциал объёма, а

$$\operatorname{div}\boldsymbol{T}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} \tag{I. 3}$$

(знак div читается «расходимость»).

Приведённая нами формула справедлива в более общих предположениях относительно S. В частности, формула (I. 2) имеет место для любой кусочно-гладкой поверхности S, ограничивающей некоторую область D.

В дальнейшем, если не будет сделано оговорок, под словом «поверхность» мы будем понимать кусочно-гладкую поверхность.

Из формулы (I. 2) вытекает важное следствие.

Лемма 1. *Пусть F — непрерывная функция, заданная в некоторой области трёхмерного евклидова пространства. Для того чтобы для любой замкнутой поверхности S, проведённой внутри области задания векторной функции $\boldsymbol{T}$ и ограничивающей область Ω, имело место равенство*

$$\iint_S T_n\,dS-\iiint_\Omega F\,dv=0, \tag{I.4}$$

необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$\operatorname{div} T + F = 0.$$

Применяя формулу (I.2), равенство (I.4) можно привести к виду

$$\iiint\limits_{\Omega} (\operatorname{div} T + F)\, dv = 0.$$

После этого достаточность условия леммы становится очевидной. Установим его необходимость. В самом деле, если бы в некоторой точке A, и тем самым в силу непрерывности и в её окрестности, функция $\operatorname{div} T + F$ была бы отлична от нуля, например положительна, то интеграл

$$\iiint\limits_{\omega} (\operatorname{div} T + F)\, dv$$

распространённый по малой области ω вокруг A, был бы не равен нулю и левая часть (1.4) была бы также отлична от нуля. Следовательно, наше предположение противоречит условию. Необходимость равенства

$$\operatorname{div} T + F = 0$$

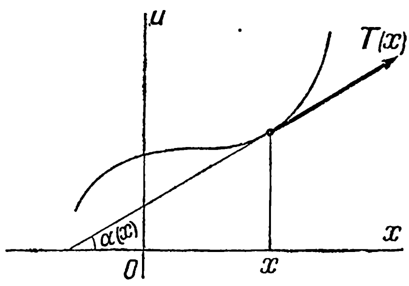
доказана.

Точно таким же образом может быть доказана аналогичная лемма для двумерной области, лежащей на плоскости.

§ 2. Уравнение колебаний струны.

Рассмотрим струну, натянутую между двумя точками. Струной называют твёрдое тело, в котором длина значительно превосходит остальные размеры. Сила натяжения, действующая на это тело, предполагается значительной. Поэтому его сопротивлением при изгибании можно пренебречь по сравнению с натяжением.

Пусть направление этой струны совпадает в состоянии покоя с направлением оси Ox. Под влиянием поперечных сил она примет другую форму, вообще говоря, непрямолинейную.



Черт. 1.

Если мы в некоторой точке x разрежем струну на две части, то влияние правой части на левую выражается в виде силы $T(x)$, направленной по касательной к линии струны (черт. 1). Допустим, для простоты рассуждений, что движение струны происходит в одной плоскости, и обозначим через u отклонение струны от положения равновесия. Пусть уравнение изогнутой линии струны в плоскости xOu будет $u = u(x, t)$. Обозначим через $\rho(x)$ погонную плотность струны, т. е. предел отношения массы малого участка струны к его длине.

Рассмотрим сначала струну, находящуюся в равновесии.

Допустим, что струна находится под действием поперечно действующей нагрузки $p(x)$. Иными словами, если мы выделим участок её $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, то приложенная к этому участку сила направлена по оси u и величина её равна $\int\limits_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx$. Обозначим через $\alpha(x)$ угол, образованный направлением касательной к струне с осью Ox; тогда составляющая на ось u силы натяжения, действующей в точке x_2, будет

$$|T(x_2)|\sin\alpha(x_2) = T(x_2)\sin\alpha(x_2),$$

где $T(x)$ — абсолютная величина (длина) вектора $T(x)$, а составляющая натяжения по оси u в точке x_1 будет:

$$-|T(x_1)|\sin\alpha(x_1) = -T(x_1)\sin\alpha(x_1).$$

Известно, что

$$\sin\alpha = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}.$$

Считая величину $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ малой и пренебрегая её квадратом, получим условие равновесия на участке струны в виде

$$T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2} - T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1} + \int\limits_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx = 0. \qquad (I.5)$$

Очевидно,

$$T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2} - T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx.$$

Условие (I.5) переходит при этом в условие:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right) + p(x)\right]dx = 0. \qquad (I.6)$$

Подинтегральная функция в (I.6) должна, очевидно, обратиться в нуль тождественно (иначе нашлись бы такие x_1, x_2, для которых интеграл (I.6) не обратился бы в нуль), и уравнение (I.6) перепишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right) + p(x) = 0. \qquad (I.7)$$

Уравнение (I.7) и есть уравнение равновесия струны при поперечной нагрузке $p(x)$.

Если мы теперь перейдём от статического случая к динамическому, т. е. рассмотрим колебания струны, то, пользуясь принципом Даламбера, нужно будет в уравнение равновесия включить ещё и силы инерции струны, которые имеют вид

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx;$$

тогда условие равновесия примет вид

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p(x)\right]dx=0,$$

и уравнение колебаний струны будет

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\rho(x)+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}p(x)=0. \tag{I.8}$$

Составляющая по оси Ox всех сил, приложенных к струне, должна быть равна нулю, так как нагрузка предполагается поперечной. Это позволяет написать равенство

$$T\cos\alpha\,|_{x=x_2}-T\cos\alpha\,|_{x=x_1}=0.$$

Предположим ещё, что натяжение не зависит от времени. Тогда, с точностью до малых величин высшего порядка, будем иметь

$$T|_{x=x_1}=T|_{x=x_2},$$

или

$$T=\text{const}.$$

Если, кроме того, плотность постоянна, а нагрузка $p(x)$ равна нулю, то уравнение (I.8) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{I.9}$$

где

$$a^2=\frac{T}{\rho}=\text{const}.$$

Уравнение (I.9) рассматривали ещё в XVIII в. Даниил Бернулли, Даламбер и Эйлер.

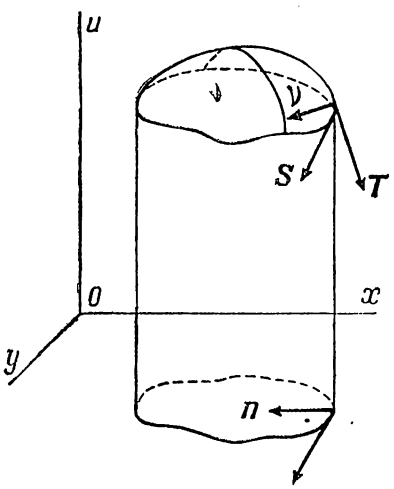
§ 3. Уравнение колебаний мембраны.

Рассмотрим плёнку, т. е. очень тонкое твёрдое тело, натянутое равномерно по всем направлениям. Пусть в спокойном состоянии она расположена в плоскости xOy. Будем предполагать, что эта плёнка столь тонка, что не сопротивляется изгибу. Такую плёнку мы будем называть мембраной.

Пусть в изогнутом состоянии уравнение её будет

$$u = u\,(t, x, y).$$

Какой бы участок S этой мембраны мы ни выделили, будем считать, что со стороны остальной части мембраны на этот участок действует направленное по нормали к контуру равномерно распределённое натяжение $\boldsymbol{T}$, лежащее в касательной плоскости к мембране (см. черт. 2).



Черт. 2.

Составим уравнение равновесия участка мембраны S, ограниченного кривой s и находящегося под действием поперечных сил. Составляющая натяжения на ось u будет выражаться как интеграл

$$\int\limits_{s} T\cos(\boldsymbol{l}u)\,ds, \qquad \text{(I.10)}$$

где T — длина вектора натяжения $\boldsymbol{T}$, а через $\boldsymbol{l}$ обозначен какой-либо вектор, имеющий направление действия натяжения. Вычислим $\cos(\boldsymbol{l}u)$.

Направление $\boldsymbol{l}$ по условию есть направление общего перпендикуляра к контуру s и к вектору, направленному по внутренней нормали ν к поверхности $u = u\,(t, x, y)$. В свою очередь, всякий вектор $\boldsymbol{s}$, направленный по касательной к контуру s, перпендикулярен к нормали ν и к единичному вектору $\boldsymbol{n}$, направленному по внутренней нормали к проекции контура s на плоскость xOy, ибо касательная $\boldsymbol{s}$ и касательная к проекции s на плоскость xOy лежат в касательной плоскости проектирующего цилиндра.

За вектор $\boldsymbol{s}$ можно принять векторное произведение

$$\boldsymbol{n} \times \nu.$$

Рассмотрим вектор $\boldsymbol{l}_1$, определённый формулой:

$$\boldsymbol{l}_1 = (\boldsymbol{n} \times \nu) \times \nu.$$

По формулам аналитической геометрии мы имеем

$$\boldsymbol{l}_1 = -\boldsymbol{n}\nu^2 + \nu(\boldsymbol{n}\nu).$$

Принимая во внимание, что вектор $\boldsymbol{n}$ имеет составляющие $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, 0, а вектор ν — составляющие $-\frac{\partial u}{\partial x}$, $-\frac{\partial u}{\partial y}$, 1, получим, отбрасывая малые величины 2-го порядка, содержащие $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ и $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$, для составляющих l_1 выражения:

$$-\cos(nx), \quad -\cos(ny), \quad -\frac{\partial u}{\partial x}\cos(nx)-\frac{\partial u}{\partial y}\cos(ny).$$

Длина вектора l_1, с точностью до малых величин высших порядков, равна единице. Поэтому, не уменьшая точности, можно считать l_1 равным единичному вектору l, направленному по линии действия натяжения.

Подставляя это выражение в уравнение равновесия мембраны, которое в данном случае имеет вид

$$\iint\limits_{\omega} p(x, y)\,dx\,dy+\int\limits_{s} T\cos(lu)\,ds=0,$$

где через $p(x, y)$ обозначена величина поперечно действующей нагрузки, отнесённой к единице площади, а через ω — проекция S на плоскость xOy, получим

$$\iint\limits_{\omega} p(x, y)\,dx\,dy-\int\limits_{s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(nx)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(ny)\right)T\,ds=0,$$

или в силу леммы 1

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial u}{\partial y}\right)+p(x,y)=0. \tag{I.11}$$

Уравнение колебаний мембраны напишется в виде

$$\iint\limits_{\omega}\left(p(x, y)-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx\,dy-$$
$$-\int\limits_{s} T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(nx)-\frac{\partial u}{\partial y}\cos(ny)\right)ds=0,$$

где $\rho=\rho(x,y)$ — плотность мембраны на единицу поверхности, или, по лемме 1:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial u}{\partial y}\right)+p(x, y)-\rho(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \tag{I.12}$$

Из (I.12) при постоянных T и ρ получим

$$T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+p(x, y)=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{I.13}$$

Сумму $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ или, в трёхмерном пространстве,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u^2}{\partial z^2}$$

часто называют оператором Лапласа и обозначают символом Δu. При этом уравнение (I.13) можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + \frac{p(x, y)}{\rho}, \tag{I.14}$$

где

$$a^2 = \frac{T}{\rho} = \text{const}.$$

§ 4. Уравнение неразрывности при движении жидкости и уравнение Лапласа.

Прежде чем приступить к выводу уравнения, называемого уравнением неразрывности, выведем одну важную формулу математического анализа. Рассмотрим некоторую замкнутую кусочно-гладкую поверхность $S(t)$, зависящую от параметра t и ограничивающую переменный объём $\Omega(t)$. Пусть $\rho(x, y, z, t)$ есть некоторая функция координат и времени t. Рассмотрим интеграл

$$Q(t) = \iiint\limits_{\Omega(t)} \rho\, dx\, dy\, dz$$

и зададимся целью вычислить производную по времени от этого выражения.

Рассмотрим сначала частный случай, когда объём $\Omega(t)$ определён неравенствами

$$0 \leqslant z \leqslant \varphi(x, y, t),$$

причём $z = \varphi(x, y, t)$ есть уравнение гладкой поверхности; производная $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ограничена: $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right| \leqslant M$.

Допустим ещё, не уменьшая общности, что поверхность $z = \varphi(x, y, t)$ ни при каком значении t не будет иметь кусков, параллельных плоскости $z = 0$.

В этом случае имеем

$$Q(t) = \iint\limits_{\varphi(x, y, t) \geqslant 0} \left[\int\limits_0^{\varphi} \rho(x, y, z, t)\, dz\right] dx\, dy.$$

Составим разностное отношение для вычисления $\frac{\partial Q}{\partial t}$:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\left\{\iint\limits_{\varphi(t+\Delta t) \geqslant 0} \left[\int\limits_0^{\varphi(t+\Delta t)} \rho\, dz\right] dx\, dy - \iint\limits_{\varphi(t) \geqslant 0} \left[\int\limits_0^{\varphi(t)} \rho\, dz\right] dx\, dy\right\}.$$

(Для сокращения письма аргументы x, y и z у φ и ρ опущены.) Простые преобразования дают

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\iint\limits_{\substack{\varphi(t)\geqslant 0\\ \varphi(t+\Delta t)\geqslant 0}}\left[\int\limits_0^{\varphi(t)}\frac{\rho(t+\Delta t)-\rho(t)}{\Delta t}\,dz\right]dx\,dy+$$

$$+\iint\limits_{\substack{\varphi(t)\geqslant 0\\ \varphi(t+\Delta t)\geqslant 0}}\left[\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{\varphi(t)}^{\varphi(t+\Delta t)}\rho(t+\Delta t)\,dz\right]dx\,dy-$$

$$-\iint\limits_{\substack{\varphi(t)\geqslant 0\\ \varphi(t+\Delta t)\leqslant 0}}\left[\frac{1}{\Delta t}\int\limits_0^{\varphi(t)}\rho(t)\,dz\right]dx\,dy+$$

$$+\iint\limits_{\substack{\varphi(t)\leqslant 0\\ \varphi(t+\Delta t)\geqslant 0}}\left[\int\limits_0^{\varphi(t+\Delta t)}\rho(t+\Delta t)\,dz\right]dx\,dy.$$

Перейдём теперь к пределу при $\Delta t\to 0$. Пределы двух последних слагаемых равны нулю. В самом деле, подинтегральная функция в каждом из них ограничена, ибо, например:

$$\frac{1}{\Delta t}\int\limits_0^{\varphi(t)}\rho(t)\,dz=\frac{\varphi(t)}{\Delta t}\left(\frac{1}{\varphi(t)}\int\limits_0^{\varphi(t)}\rho(t)\,dz\right),$$

причём

$$\left|\frac{\varphi(t)}{\Delta t}\right|\leqslant\left|\frac{\varphi(t)-\varphi(t+\Delta t)}{\Delta t}\right|\leqslant M,$$

а второй множитель ограничен по теореме о среднем; с другой стороны, область интегрирования в них стремится к нулю. Переходя к пределу в первых двух интегралах и применяя снова теорему о среднем, получим

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{\varphi(t)}^{\varphi(t+\Delta t)}\rho(t+\Delta t)\,dz=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}\left[\frac{1}{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}\int\limits_{\varphi(t)}^{\varphi(t+\Delta t)}\rho(t+\Delta t)\,dz\right]=\frac{\partial\varphi}{\partial t}\rho.$$

Отсюда

$$\frac{dQ}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\iint\limits_{\varphi\geqslant 0}\left[\int\limits_0^{\varphi}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dz\right]dx\,dy+\iint\limits_{z=\varphi}\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx\,dy=$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz+\iint\limits_S\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cos(nz)\,dS.$$

2 Зак. 1956. С. Л. Соболев.

Выражение $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ называют кажущейся скоростью движения поверхности $S(t)$ по направлению оси z. Оно допускает очень простую геометрическую интерпретацию. Представим семейство поверхностей $S(t)$ в виде, разрешённом относительно t:

$$t = S(x, y, z).$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial z}}.$$

Но $\frac{\partial t}{\partial z}$ есть составляющая по оси z вектора $\operatorname{grad} t$, направленного по нормали к поверхности S и имеющего следующие компоненты:

$$\frac{\partial t}{\partial n}\cos(nx), \quad \frac{\partial t}{\partial n}\cos(ny), \quad \frac{\partial t}{\partial n}\cos(nz).$$

Отсюда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial z}} = \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial n}\cos(nz)}.$$

Выражение $\frac{1}{\frac{\partial t}{\partial n}}$ называется кажущейся скоростью движения поверхности по нормали. Мы обозначим его через v_n. Для кажущейся скорости движения поверхности S по направлению оси z (эту величину мы обозначим через v_z) имеем

$$v_z = \frac{v_n}{\cos(nz)}.$$

Поэтому

$$v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Если поверхность S состоит из материальных частиц, движущихся со скоростью v, то скорость в направлении нормали будет

$$v_n = v_x\cos(nx) + v_y\cos(ny) + v_z\cos(nz),$$

и мы можем записать нашу формулу в виде

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\Omega(t)} \rho\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{\Omega(t)} \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz + \iint\limits_{S(t)} \rho v_n\, dS. \qquad (I.15)$$

В общем случае, когда поверхность $S(t)$ имеет произвольную форму, получим ту же формулу, так как поверхность $S(t)$ всегда может быть разбита на конечное число кусков таким образом, чтобы для каждого куска прямые, параллельные какой-либо координатной оси, встречали бы переменную часть границы этого куска только в одной точке.

Полезно дать наглядную физическую иллюстрацию формуле (I.15). В некоторый момент времени t выделим на поверхности S некоторый элементарный участок dS и проведём траектории всех точек, принадлежащих dS, на отрезке времени $(t, t+\Delta t)$. Этот участок заполнит объём, приближённо совпадающий с косым цилиндром, образующие которого имеют вид $v\,dt$, где v есть вектор скорости движения поверхности. Объём этого цилиндра равен произведению площади основания на высоту, т. е. $v_n\,dt\,dS$. Всё приращение интеграла $\iiint \rho\,d\Omega$, вызванное перемещением поверхности S, приблизительно равняется интегралу

$$\iint\limits_S \rho v_n\,dt\,dS.$$

Деля это выражение на dt и вычисляя отдельно приращение Q, обусловленное изменением ρ, получим формулу (I.15).

Формула (I.15) позволяет получить уравнение, выражающее неизменность количества жидкости или газа при движении. Пусть в некоторой части пространства происходит движение жидкости, причём составляющие скорости $v_x(x, y, z, t)$, $v_y(x, y, z, t)$ и $v_z(x, y, z, t)$ суть заданные функции координат и времени. Представим себе материальную поверхность $S(t)$, состоящую из одних и тех же движущихся частиц и ограничивающую некоторый переменный объём $\Omega(t)$. Количество жидкости, заключённой в объёме $\Omega(t)$, равно

$$Q = \iiint\limits_{\Omega(t)} \rho(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz,$$

где $\rho(x, y, z, t)$ — плотность жидкости.

Если жидкость не поступает извне и не исчезает, то количество её в таком объёме должно оставаться постоянным. Дифференцируя по t, получим

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint\limits_{\Omega(t)} \frac{\partial\rho}{\partial t}\,d\Omega + \iint\limits_{S(t)} \rho v_n\,dS = 0.$$

Это уравнение должно иметь место для любой поверхности S и любого момента времени t. Применяя лемму 1, получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \tag{I.16}$$

или в раскрытом виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0.$$

Это и есть так называемое уравнение неразрывности. Покажем одно применение этого уравнения для случая установившегося движения несжимаемой однородной жидкости. Задача о потенциальном движении несжимаемой жидкости есть задача об отыскании неизвестной функции V такой, что

$$v = \operatorname{grad} V \text{ или } v_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

При этом предполагается, что плотность жидкости постоянна, а компоненты скорости не зависят от времени. Подставляя выражения для скоростей в уравнение неразрывности, получим:

$$\rho\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = 0,$$

или

$$\Delta V = 0, \tag{I.17}$$

где Δ обозначает введённый выше оператор Лапласа $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Уравнение (I.17) называется уравнением Лапласа. В дальнейшем, когда мы выпишем полную систему уравнений движения жидкости, мы проверим, что любая функция V, удовлетворяющая уравнению (I.17), действительно описывает некоторое возможное движение жидкости. Таким образом, для решения этой задачи достаточно уметь находить нужные решения уравнения (I.17).

§ 5. Уравнение передачи тепла.

Как известно из курсов физики, теплота представляет собой результат беспорядочного движения частиц вещества. Степень нагретости тела определяется его температурой. Между энергией теплового движения и температурой существует простая зависимость:

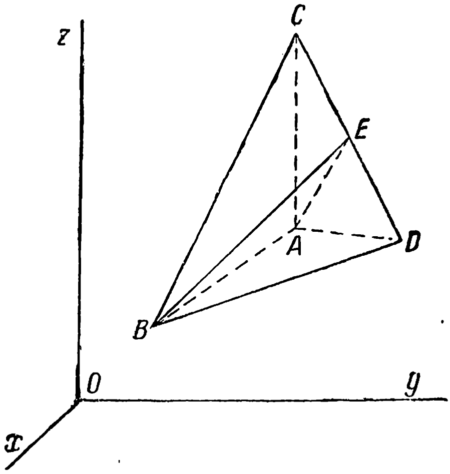
$$Q = \iiint\limits_D c\rho T\, dv,$$

где D — объём, занимаемый некоторым телом, Q — энергия теплового движения, или, что то же самое, количество тепла в калориях, ρ — плотность вещества, T — абсолютная температура, c — теплоёмкость.

Передача тепла от одного тела к другому или от одного участка среды к другому происходит различными путями. Не принимая во внимание лучеиспускания, химических процессов и т. п., мы будем здесь рассматривать лишь перенос тепла непосредственной передачей кинетической энергии от частицы к частице путём столкновений.

Выделим мысленно участок некоторой гладкой поверхности S, лежащий внутри изучаемой среды, и пусть n — единичный вектор, направленный по нормали к S. Тепловая энергия движения частиц, расположенных по обе стороны этого участка, с течением времени может изменяться за счёт столкновений их между собою или за счёт перехода частиц через поверхность.

Частица, центр тяжести которой находился по одну сторону поверхности и которая имела там некоторую энергию, может передать эту энергию либо при переходе на другую сторону поверхности, либо при столкновении с частицей, центр тяжести которой находился с другой стороны поверхности. Обозначим через $\Delta_S Q$ количество энергии, переданное за единицу времени через поверхность S частицам, находившимся с той стороны поверхности, куда направлена нормаль, от частиц, находившихся с другой стороны S.



Черт. 3.

Сделаем допущение, что величину $\Delta_S Q$ можно представить в виде

$$\Delta_S Q = \iint\limits_S \chi(S, t)\, ds,$$

где

$$\chi(S, t) = f(x, y, z; n; t).$$

Эти формулы равносильны предположению, что количество тепловой энергии, проходящей через элементарную площадку, зависит только от положения центра площадки и нормали к ней. Будем ещё предполагать, что f, ρ, c и T — непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов.

Изучая распространение тепла в некотором теле, мы будем для общности предполагать, что внутри этого тела непрерывно распределены источники тепла с интенсивностью $q(x, y, z, t)$. Записывая баланс тепла для объёма D, получим:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint\limits_D c\rho T\, dv = \iiint\limits_D \frac{\partial (c\rho T)}{\partial t}\, dv =$$

$$= -\iint\limits_S f(x, y, z; n; t)\, dS + \iiint\limits_D q\, dv, \qquad \text{(I. 18)}$$

где вектор n направлен по внешней нормали.

Объём D является совершенно произвольным. Применим эту формулу, взяв за D тетраэдр Ω, одна из вершин которого лежит в точке x_0, y_0, z_0, а три грани параллельны координатным плоскостям (черт. 3).

Обозначим грани этого тетраэдра, перпендикулярные соответственно к осям x, y, z, через S_x, S_y, S_z, а наклонную грань — через S. Обозначим площадь грани S через σ, а площади остальных граней соответственно через σ_x, σ_y, σ_z. Для σ_x, σ_y и σ_z получим:

$$\sigma_x = \sigma \cos(nx), \quad \sigma_y = \sigma \cos(ny), \quad \sigma_z = \sigma \cos(nz),$$

где $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ — направляющие косинусы внешней нормали к грани S.

Применим формулу (I. 18) к тетраэдру Ω. Мы получим:

$$\int\int_{\Omega}\int \frac{\partial}{\partial t}(c\rho T)\,dv - \int\int_{\Omega}\int q\,dv =$$
$$= \int_{S_x}\int f(x, y, z; \boldsymbol{i}; t)\,d\sigma_x + \int_{S_y}\int f(x, y, z; \boldsymbol{j}; t)\,d\sigma_y +$$
$$+ \int_{S_z}\int f(x, y, z; \boldsymbol{k}; t)\,d\sigma_z + \int_{S}\int f(x, y, z; -\boldsymbol{n}; t)\,d\sigma,$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ обозначают единичные векторы, параллельные координатным осям x, y, z. Если объём Ω равен ω, то теорема в среднем даёт:

$$\omega \frac{\partial}{\partial t}(c\rho T)\Big|_{\text{ср}} = \sigma_x v_x\Big|_{\text{ср}} + \sigma_y v_y\Big|_{\text{ср}} + \sigma_z v_z\Big|_{\text{ср}} + \sigma f(x, y, z; -\boldsymbol{n}; t)\Big|_{\text{ср}},$$

где положено в целях сокращения

$$v_x = f(x, y, z; \boldsymbol{i}; t), \quad v_y = f(x, y, z; \boldsymbol{j}; t), \quad v_z = f(x, y, z, \boldsymbol{k}; t).$$

Знаком $|_{\text{ср}}$ обозначено некоторое среднее значение функции. Разделим обе части на σ и перейдём к пределу при $\sigma \to 0$, считая направление $\boldsymbol{n}$ постоянным. Предел левой части будет, очевидно, равен нулю. Принимая во внимание, что

$$f(x, y, z; -\boldsymbol{n}; t) = -f(x, y, z; \boldsymbol{n}; t),$$

получим:

$$f(x_0, y_0, z_0; \boldsymbol{n}; t) =$$
$$= [v_x \cos(nx) + v_y \cos(ny) + v_z \cos(nz)]\Big|_{x_0, y_0, z_0} = v_n\Big|_{x_0, y_0, z_0}.$$

Мы видим, таким образом, что функция $f(x, y, z; \boldsymbol{n}; t)$ представляет собой проекцию на направление $\boldsymbol{n}$ некоторого вектора $\boldsymbol{v}$. Имеем

$$\int\int_{D}\int \frac{\partial}{\partial t}(\rho c T)\,dv = -\int_{S}\int v_n\,dS + \int\int_{D}\int q\,dv$$

при произвольном объёме D.

Вектор $\boldsymbol{v}$ мы будем называть потоком тепла. Он аналогичен вектору скорости течения жидкости.

Поток тепла, существующий в среде, связан с распределением температуры в ней. В естественных условиях тепло всегда течёт от частей с более высокой температурой к тем частям, температура которых ниже. Выделим некоторую малую площадку dS в нашей среде и будем исследовать, как меняется температура в точках, близких к этой площадке.

Рост температуры характеризуется величиной

$$\frac{\partial T}{\partial n} = n \operatorname{grad} T.$$

Допустим, что наша среда является изотропной, т. е. свойства её во всех направлениях одинаковы. Естественно предположить, что если температура возрастает в направлении нормали, то поток тепла через площадку S отрицателен. Иными словами, величины

$$n \operatorname{grad} T = \operatorname{grad}_n T \text{ и } v_n dS$$

должны иметь противоположные знаки. Это должно быть верно при любом направлении n. Следовательно, проекции векторов $\operatorname{grad} T$ и v на любое направление должны быть обратны по знаку, что возможно только при условии, что эти векторы противоположно направлены. Значит,

$$v = -k \operatorname{grad} T,$$

где k — некоторая положительная скалярная величина, которая может зависеть от свойства среды, от температуры, от характера изменения температуры и т. п. В первом приближении можно считать k функцией только от точки среды. Это предположение хорошо оправдывается на опыте.

Подставляя полученное выражение для v в последнюю формулу для баланса тепла, получим:

$$\iiint\limits_D \frac{\partial}{\partial t}(\rho c T)\, dV = \iint\limits_S k \frac{\partial T}{\partial n}\, dS + \iiint\limits_D q\, dv.$$

Применяя лемму из первого параграфа, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c T) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial T}{\partial z}\right) + q. \tag{I.19}$$

Предполагая ρ, c и k постоянными, получим:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T + q_1, \tag{I.20}$$

где

$$a^2 = \frac{k}{\rho c} = \text{const.}, \quad q_1 = \frac{q}{\rho c}.$$

Уравнения (I.19) или (I.20) носят название уравнений передачи тепла, или уравнений теплопроводности.

§ 6. Звуковые волны.

В качестве последнего примера рассмотрим уравнение распространения звука.

Пусть какая-либо сжимаемая жидкость или газ движется со скоростью v, проекции которой на оси координат обозначим:

$$v_x(t, x, y, z), \quad v_y(t, x, y, z), \quad v_z(t, x, y, z).$$

Траектория каждой материальной точки этой жидкости будет определяться уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z.$$

Легко подсчитать её ускорение. Мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{I.21}$$

Напишем уравнение движения жидкости, находящейся под действием силы F с проекциями X, Y, Z, приложенной в каждой точке. Если давление в каждой точке будет $p(t, x, y, z)$, то на некоторую поверхность S, ограничивающую объём Ω, будет действовать сила, проекция которой на ось x равна:

$$\iint_S p(t, x, y, z)\cos(nx)\, dS.$$

Прибавляя к этому проекции объёмных сил и сил инерции на ту же ось, получим:

$$\iint_S p\cos(nx)\,dS + \iiint_\Omega X\,dv -$$
$$- \iiint_\Omega \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)dv = 0,$$

где dv — элемент объёма.

На основании леммы 1 уравнение движения будет:

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \frac{\partial p}{\partial x} - X = 0. \tag{I.22}$$

Аналогично пишутся два других уравнения для составляющих на оси y и z:

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial p}{\partial y}-Y=0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+\frac{\partial p}{\partial z}-Z=0.$$

Написанные выше три уравнения содержат пять неизвестных функций: v_x, v_y, v_z, p и ρ. Для того чтобы система стала определённой, необходимо добавить ещё два уравнения. Одно уравнение, связывающее эти величины, мы уже вывели — уравнение неразрывности.

В общем случае нам нужно было бы отыскать ещё одно уравнение. Однако, предполагая жидкость несжимаемой и однородной, мы можем положить

$$\rho=\text{const}.$$

и получить сразу достаточное число уравнений.

Мы можем теперь проверить, что полученное нами выше решение задачи о потенциальном движении несжимаемой жидкости:

$$v=\operatorname{grad} V,$$

$$\Delta V=0,$$

действительно удовлетворяет полной системе уравнений движения жидкости, если определить соответствующим образом функцию и если, кроме того,

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z},$$

т. е. если внешние силы имеют потенциал. Достаточно убедиться, что уравнения (I.22) позволяют построить функцию p, если считать

$$v_x=\frac{\partial V}{\partial x},\quad v_y=\frac{\partial V}{\partial y},\quad v_z=\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Подставим в уравнения (I.22) вместо v_x, v_y, v_z приведённые выше их значения. Тогда из этих уравнений мы получим явные выражения для

$$\frac{\partial p}{\partial x},\quad \frac{\partial p}{\partial y},\quad \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Из теории уравнений в частных производных 1-го порядка известно, что система будет совместной в том случае, если вторые смешанные производные

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial z},\quad \frac{\partial^2 p}{\partial y\,\partial z},$$

определённые из различных уравнений, получаются одними и теми же. Проверить это мы предоставляем читателю.

В общем случае сжимаемой жидкости из физики известно, что давление и плотность всякой жидкости или газа связаны так называемым уравнением состояния, в которое входит ещё абсолютная температура T. Для идеального газа это уравнение имеет вид

$$\rho = \frac{p}{RT},$$

где R есть так называемая газовая постоянная. Это уравнение вводит ещё одну неизвестную функцию — T. В некоторых случаях к приведённым уравнениям приходится добавлять ещё одно уравнение, называемое уравнением притока тепла.

Однако в ряде случаев можно предположить, что давление и плотность связаны между собой прямой функциональной зависимостью:

$$\rho = f(p), \tag{I.23}$$

где f — заданная функция.

Это обстоятельство имеет место, например, при рассмотрении процессов, протекающих столь быстро, что тепло не успевает передаваться от одной частицы к другой. Такие процессы называются адиабатическими.

Для того чтобы из общих уравнений (I.16), (I.22), (I.23) получить нужные нам уравнения распространения звука, мы сделаем несколько упрощающих предположений. Будем считать, что движение рассматриваемого газа представляет собой малые колебания вокруг положения равновесия. В этом состоянии равновесия давление p_0 и плотность ρ_0 постоянны. Отклонения $p - p_0$ и $\rho - \rho_0$, равно как и скорости, мы будем предполагать малыми и, в частности, будем считать, что членами типа $\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}\right)$, ... и т. д. в уравнениях (I.22) можно пренебречь. Мы получим:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = X, \quad \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = Y, \quad \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = Z.$$

С точностью до выражений вида $\frac{\partial \rho}{\partial t} v_x$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} v_y$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} v_z$, которые мы предполагаем малыми, эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) + \frac{\partial p}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_y) + \frac{\partial p}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_z) + \frac{\partial p}{\partial z} = Z.$$

Дифференцируя эти уравнения соответственно по x, y и z и складывая, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\operatorname{div}(\rho v)\right] + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}. \tag{I.24}$$

Левая часть уравнения (I.24), в силу уравнения неразрывности, может быть записана в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}-f'(p)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-f''(p)\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2.$$

Наконец, принимая $f'(p)$ в малом промежутке изменения p за постоянную: $f'(p)=f'(p_0)$, и обозначая правую часть (I.24), то-есть $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$ через Φ, будем иметь:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\Phi, \tag{I.25}$$

где a — постоянная, определяемая по формуле

$$\frac{1}{a}=\sqrt{f'(p_0)}.$$

Используя символическое обозначение, имеем

$$\Delta p-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\Phi.$$

Можно получить уравнения распространения звука и иным путём, взяв, например, за неизвестную функцию не давление p, а плотность ρ. Оказывается, что при этом для ρ получается уравнение в частных производных того же самого вида, что и уравнение (I.25).

Выведенные нами уравнения достаточно характерны. Мы могли бы привести ещё много других примеров, однако вывод уравнений математической физики не входит в нашу задачу, так как нашей основной целью является исследование и решение таких уравнений. Поэтому ограничимся указанными примерами и перейдём к изучению различных задач для этих уравнений.

ЛЕКЦИЯ II.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. ПРИМЕР АДАМАРА.

§ 1. Начальные и краевые условия.

Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение этих уравнений не определяется однозначно.

Решение уравнения

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{II.1}$$

зависит, вообще говоря, от n произвольных постоянных

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n). \tag{II.2}$$

Часто можно взять в качестве этих постоянных начальные значения неизвестной функции и её производных:

$$y|_{x=0} = y_0, \quad y'|_{x=0} = y_0^{(1)}, \ldots, \quad y^{(n-1)}|_{x=0} = y_0^{(n-1)}. \tag{II.3}$$

Решение вида (II.2) называется общим тогда, когда можно удовлетворить условиям (II.3) с любыми y_0, $y_0^{(1)}$, $\ldots$, $y_0^{(n-1)}$, выбрав соответствующие значения для постоянных $c_1, \ldots, c_n$; для этого нужно бывает решить некоторую систему уравнений. В частности, если уравнение (II.1) является линейным однородным, то общий интеграл (II.2) имеет весьма простой вид

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

где функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ являются системой линейно независимых частных решений.

Подобно этому для уравнений в частных производных также нет единственности решения. Решение уравнения в частных производных зависит, вообще говоря, от некоторых произвольных функций. Например, общим решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

с двумя независимыми переменными x и y будет

$$u = f(x),$$

где $f(x)$ — совершенно произвольная функция.

Для того чтобы сделать решение определённым, обычно нужно задать некоторые дополнительные условия, например потребовать, чтобы неизвестная функция, а также часто ещё некоторые её производные или некоторые комбинации функции и её производных принимали заданные значения на различных многообразиях.

Мыслима, вообще говоря, и постановка задачи об отыскании общего вида решений для уравнения в частных производных, аналогичная соответствующей задаче для уравнений вида (II.1). Однако, хотя такие общие решения и существуют, знание их, за редким исключением, ничего не даёт нам для решения важных частных задач, ибо вместо системы конечных уравнений для нахождения $c_1, c_2, \ldots, c_n$, как это имело место для обыкновенных уравнений, мы получим при решении этих частных задач систему столь сложных функциональных соотношений для произвольных функций, что их отыскание практически невозможно.

Каждая задача математической физики ставится как задача решения некоторого уравнения, например (I.9), (I.14), (I.17) или (I.19) при определённых дополнительных условиях, которые в большинстве случаев диктуются её физической постановкой.

Укажем вкратце, какие возможны постановки задач для уравнений, выведенных нами выше.

В задаче о колебании струны естественно, например, рассматривать участок струны $0 \leqslant x \leqslant l$, закреплённый по обоим концам. Следовательно, нужно искать решения уравнения (I.9), удовлетворяющие условиям

$$u|_{x=0} = 0 \text{ и } u|_{x=l} = 0. \tag{II.4}$$

Если концы не закреплены, а сами приводятся в движение по определённому закону, то условия (II.4) заменяются условиями

$$u|_{x=0} = f_1(t) \text{ и } u|_{x=l} = f_2(t). \tag{II.5}$$

Возможно задание также и других условий на концах. Всех типов подобных заданий мы разбирать не будем.

Задания поведения струны на концах недостаточно для решения задачи. Необходимо ещё знать, например, значение функции u и её скорости $\frac{\partial u}{\partial t}$ в начальный момент времени, т. е.

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{II.6}$$

Условия (II.5) и (II.6) совместно полностью определяют решение уравнения (I.9). Мы в дальнейшем установим, что при условии некоторой гладкости функций f_1, f_2, φ_0, φ_1 такое решение всегда существует и, следовательно, среди этих условий нет лишних.

Задача о колебании мембраны ставится совершенно аналогично. Для того чтобы определить её движение, достаточно, например, задать

$$\left.\begin{aligned} u\big|_{t=0} &= \varphi_0(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} &= \varphi_1(x, y) \end{aligned}\right\} \tag{II.7}$$

и значение функции u на границе S

$$u|_S = f(S, t), \tag{II.8}$$

где функция $f(S, t)$ зависит от точки на поверхности S и времени t.

Вместо значения u на границе иногда задаётся линейная комбинация:

$$\alpha u\bigg|_S + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S = f(S, t). \tag{II.9}$$

Условия (II.7) и (II.9) делают, как мы установим далее, задачу вполне определённой. Решение, удовлетворяющее им, всегда существует, и поэтому среди условий (II.7) и (II.9) нет лишних.

Для решения задачи о распространении тепла в некотором теле [см. (I.19)] достаточно знать его начальную температуру

$$T|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \tag{II.10}$$

а также условия на границе области тела

$$\alpha T\bigg|_S + \beta\frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_S = f(S), \tag{II.11}$$

где $f(S)$ обозначает заданную функцию точки на поверхности.

Во всех рассмотренных уравнениях — уравнении колебаний мембраны и струны, уравнении теплопроводности — вовсе не обязательно рассматривать ограниченное тело. Мы можем рассматривать наряду с этим и неограниченно простирающуюся прямую, плоскость или пространство; тогда условия (II.4), (II.5), (II.8), (II.9) и (II.11), которые обычно называют краевыми, или граничными, условиями, отпадают. Задача без таких условий носит название задачи Коши; условия (II.6), (II.7) и (II.10) называются начальными условиями или данными Коши.

Мы можем рассматривать тело, в котором, в результате продолжительного действия различных постоянных влияний на границе, внутри тела установилась некоторая температура, постоянная в каждой точке, но меняющаяся от одной точки к другой.

При этом в теле образуется установившееся тепловое состояние. Из уравнения (I.20), полагая $\frac{\partial T}{\partial t}=0$, получим

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=-\frac{q}{\rho c}. \tag{II.12}$$

Уравнение (II.12) можно решать при условии (II.11). Особый интерес представляют два простейших случая, когда $\alpha=0$ или $\beta=0$. Задача решения уравнения (II.12) при условии

$$T|_S=f(S) \tag{II.13}$$

называется задачей Дирихле. Эту же задачу можно ставить и решать и для уравнения с двумя независимыми переменными; тогда уравнение (II.12) запишется так:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=-\frac{q}{\rho c}. \tag{II.14}$$

При $q\equiv 0$ задача может рассматриваться одновременно и как задача о. равновесии мембраны.

В самом деле, если мы в уравнении мембраны положим $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ и, следовательно, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$, мы получим опять уравнение вида (II.14).

Другая задача об отыскании решений уравнения (II.12) при условии

$$\frac{\partial T}{\partial n}=f(S) \tag{II.15}$$

называется задачей Неймана; её также можно рассматривать и для двух независимых переменных. К той же задаче Неймана приводит и задача о потенциальном установившемся движении несжимаемой жидкости (I.17). Желая найти скорости жидкости внутри некоторой области, естественно задать на границе этой области величину нормальной составляющей скорости v_n, которая характеризует поток жидкости через каждую точку поверхности. Если, например, поверхность S является непроницаемой стенкой, мы должны поставить условие, что поток жидкости через эту стенку равен нулю. Но $v_n=\frac{\partial V}{\partial n}$, откуда видно, что поставленная нами задача сводится к задаче Неймана.

Для уравнения (II.12), как и для предыдущих, вовсе не обязательно заниматься лишь решением его в конечной области. Очень часто важно бывает решить его для области неограниченной. Это бывает, например, тогда, когда размеры рассматриваемой области очень велики по сравнению с масштабом изучаемого явления. Естественно, например, при изучении явления теплоотдачи некоторого длинного трубопровода, заложенного в земле, считать, что земля является не шаром, а неограниченным полупространством, и решать уравнение (II.12) в полупространстве с вырезанным цилиндром и т. д.

При рассмотрении бесконечных областей далеко не безразлично, как ведёт себя решение в далёких точках изучаемой области; во многих случаях только при известных предположениях об этом поведении задача становится определённой. Например, если решать уравнение (II.12) в бесконечном пространстве с шаровым вырезом (т. е. решать его для внешности некоторого шара), приходится накладывать на решение то дополнительное ограничение, что оно должно обращаться в нуль на бесконечности. Иначе решение остаётся неопределённым.

Важную роль играет ещё одно дополнительное соображение.

§ 2. Понятие о корректно поставленной задаче. Пример Адамара.

Постановка задач математической физики содержит, как мы видели, некоторые функции, входящие в начальные и предельные условия, и решение, вообще говоря, зависит от этих функций. Эти функции определяются обычно из опыта и поэтому не могут быть найдены абсолютно точно.

Всегда неизбежна некоторая погрешность в начальных или граничных условиях. Эта погрешность будет сказываться и на решении, и не всегда погрешность в решении окажется, в свою очередь, малой.

Мы рассмотрим очень простые примеры задач, где малая ошибка в данных может повлечь за собой очень большую ошибку в результате. Исследуя уравнения математической физики, мы всегда должны особо рассматривать вопрос о зависимости решения от начальных и предельных условий.

Пусть рассматриваемая нами задача математической физики свелась к отысканию некоторой функции $u(x, y, z, t)$ четырёх переменных в какой-то области Ω_t изменения этих переменных, удовлетворяющей в этой области уравнению

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right) = 0. \qquad \text{(II.16)}$$

В примерах, разобранных выше, такой областью служила область Ω независимых переменных x, y, z и какой-то промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant T$.

Пусть искомое решение подчинено дополнительным условиям вида

$$\Psi_j\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial^r u}{\partial t^r}\right)\Big|_{S_i} = \varphi_j(S_i), \qquad \text{(II.17)}$$

$$i = 1, 2, \ldots, l;$$

$$j = 1, 2, \ldots, p,$$

где S_i — некоторое многообразие в пространстве x, y, z, t, число измерений которого меньше четырёх, а $\varphi_j(S_i)$ — заданная функция на многообразии S_i.

Эти условия были поставлены нами выше, например на многообразиях $t=0$ и на некоторой поверхности S пространства (x, y, z) для всех значений t.

Допустим, что условия (II.17) определяют в Ω_t единственное решение задачи. Мы будем говорить, что в области Ω_t решение зависит от граничных или начальных условий непрерывно, если малые изменения функций, стоящих в этих условиях, влекут за собой малые изменения в решении. Наоборот, мы будем говорить, что решение зависит от этих данных разрывным образом, если малые изменения в функциях $\varphi_j(S_i)$, стоящих в этих данных, не всегда дают малые изменения решения. Понятие непрерывной зависимости в данном случае является более сложным, чем обычное понятие непрерывности функций нескольких переменных. Можно по-разному понимать слова «малые отклонения в решении» или «малые отклонения в начальных условиях». Поясним сказанное примерами.

Пусть вместо функций $\varphi_j(S_i)$, которые мы предполагаем обладающими непрерывными производными до какого-либо порядка k включительно, мы подставим в правую часть (II.17) новые функции

$$\varphi_j^*(S_i) = \varphi_j(S_i) + \varphi_j'(S_i), \tag{II.18}$$

также имеющие k непрерывных производных.

Условимся говорить, что $\varphi_j^*(S_i)$ отстоит от $\varphi_j(S_i)$ на расстояние не более η до порядка k, если абсолютные величины всех $\varphi_j'(S_i)$ и их частных производных до порядка k не превосходят η. Мы имеем в виду, что дифференцирование производится по каким-нибудь параметрам на многообразии S_i.

Пусть теперь при произвольных таких $\varphi_j^*(S_i)$ рассматриваемая задача имеет решение:

$$u^* = u + u', \tag{II.19}$$

где u — решение задачи, соответствующее функциям $\varphi_j(S_i)$ в правых частях (II.17).

Может случиться, что функция u^* будет отстоять от u на расстояние не более ε до порядка p во всей области Ω_t, как только φ^* будет отстоять от φ на расстояние не более $\eta(\varepsilon)$ до некоторого определённого порядка k.

В этом случае мы будем говорить, что решение зависит от дополнительных условий непрерывно до порядка (p, k) в Ω_t.

Если, наоборот, можно указать такое ε_0, что каково бы ни было η, существуют $\varphi_j^*(S_i)$, отстоящие от $\varphi_j(S_i)$ не более, чем на η до порядка k, для которых u^* отстоят от u больше, чем на ε_0 до порядка p.

Это решение в Ω_t зависит от дополнительных условий разрывным образом порядка (p, k).

Приведём ещё один пример того, как может быть определено понятие непрерывности. Будем считать функцию u малой, если

$$\iiint\limits_{\Omega_t} u'^2\,dx\,dy\,dz < \varepsilon,$$

где ε — достаточно малое положительное число, а функции φ_j малыми, если малы интегралы

$$\iint \varphi_j'^2(S_i)\,dS_i.$$

При таком понимании непрерывности зависимость u от φ_j следует считать непрерывной, если неравенство

$$\iiint\limits_{\Omega_t} u'^2\,dx\,dy\,dz < \varepsilon \tag{II.20}$$

удовлетворяется всегда, как только

$$\iint\limits_{S_i} \varphi_j'^2(S_i)\,dS_i < \eta(\varepsilon). \tag{II.21}$$

Зависимость u от φ_j может обладать непрерывностью какого-либо одного рода и не обладать непрерывностью другого рода; поэтому каждый раз, говоря о непрерывности, нужно условиться, о каком понимании её идёт речь.

В случае, когда существует область Ω_t изменения независимых переменных, в которой имеется единственное решение задачи, зависящее от φ_j непрерывным образом, мы будем говорить, что задача поставлена корректно, в противном случае назовём задачу поставленной некорректно, в смысле данного определения непрерывной зависимости.

Замечание. Обычно область Ω_t определяется самой задачей и тем промежутком значений параметра (времени) t, для которого ищется решение. Изменение области Ω_t для данной задачи может происходить лишь за счёт изменения упомянутого промежутка значений.

В стационарных задачах, т. е. в задачах, где и уравнение и условия, определяющие решение, не зависят от времени t, как, например, в задачах Дирихле и Неймана, область Ω_t также не зависит от времени и вполне определена самой постановкой задачи.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений задача об интегрировании уравнения

$$\frac{d^m u}{dx^m}=f\left(x, u, \frac{du}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}\right)$$

с начальными условиями

$$u\Big|_{x=0}=u_0, \ \frac{du}{dx}\Big|_{x=0}=u_1, \ \ldots, \ \frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}\Big|_{x=0}=u_{m-2}$$

при ограничениях, налагаемых на функцию f теоремой существования и единственности, как известно, всегда поставлена корректно.

То же самое относится к уравнениям в частных производных 1-го порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f\left(t, x, y, z, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Задача Коши, т. е. задача решения уравнения при начальных данных $u|_{t=0}=u_0(x, y, z)$, для этого уравнения поставлена корректно, так как u зависит от u_0 непрерывно до порядка (1.1).

Это обстоятельство для уравнений в частных производных более высокого порядка уже не всегда будет иметь место; поэтому ставить для них ту же задачу Коши не всегда имеет смысл.

Разберём следующий пример, принадлежащий Адамару. Найдём решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

в полуплоскости $y>0$, удовлетворяющее условиям

$$u\Big|_{y=0}=0, \ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=e^{-\sqrt{n}}\cos nx.$$

Нетрудно видеть, что решение это будет иметь вид

$$u=\frac{1}{n}e^{-\sqrt{n}}\cos nx \operatorname{ch} ny. \qquad \text{(II.22)}$$

Можно доказать, что решение поставленной задачи единственно. Легко видеть, что когда n стремится к бесконечности, функция $e^{-\sqrt{n}}\cos nx$ равномерно стремится к нулю и притом не только сама, но и все её производные. Однако решение (II.22) при любом y, отличном от нуля, имеет вид косинусоиды со сколь угодно большой амплитудой и, конечно, не стремится ни к какому пределу. При $x=0$ оно просто неограниченно растёт вместе с n.

Ясно, что здесь ни в какой области x, y, примыкающей к оси $y=0$, и ни при каком из перечисленных выше определений непрерывности говорить о «непрерывной зависимости» решений от начальных данных нельзя, и задача поставлена некорректно в смысле любого из перечисленных определений непрерывности.

Если рассматривать вопрос о непрерывной зависимости в бесконечной области, то даже для обыкновенных уравнений этот вопрос перестаёт быть столь простым. Непрерывная зависимость от начальных данных там носит название «устойчивости по Ляпунову».

Аналогичные вопросы теории уравнений в частных производных также естественно называть теорией устойчивости. Эти вопросы пока ещё мало разработаны и трудны для элементарного курса, и мы заниматься ими не будем.

Решение задачи, некорректно поставленной, в большинстве случаев не имеет никакой практической ценности.

Разбирая решение всех задач, входящих в курс, мы будем каждый раз останавливаться на корректности их постановки. В следующей лекции мы займёмся более детальным изучением различий между всеми теми уравнениями, которые мы до сих пор изучали.

ЛЕКЦИЯ III.

КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-го ПОРЯДКА.

§ 1. Линейные уравнения и квадратичные формы. Канонический вид уравнения.

Все рассмотренные нами до сих пор уравнения представляли собой линейные уравнения 2-го порядка с вещественными коэффициентами, т. е. уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=F, \tag{III.1}$$

где A_{ij}, B_i, C и F представляют собой заданные функции от x_1, x_2, ..., x_n. Для того чтобы изучить свойства этих уравнений более детально, мы займёмся исследованием некоторых свойств их коэффициентов. Посмотрим прежде всего, по какому закону преобразуются коэффициенты уравнения (III.1) при произвольной замене независимых переменных, или, что то же самое, при каком-либо геометрическом преобразовании пространства.

Введём вместо x_1, x_2, ..., x_n новые переменные

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n.$$

Допустим, что функции $y_1(x_1, \ldots, x_n)$, ..., $y_n(x_1, \ldots, x_n)$ обладают непрерывными вторыми производными.

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}; \tag{III.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_k}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_l}\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{III.3}$$

Подставляя выражения (III.2) и (III.3) в уравнение (III.1), мы получим:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_l}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}B_i\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\right)+Cu=F. \qquad \text{(III.4)}$$

Если обозначить через $\bar{A}_{kl}$ новые коэффициенты при вторых производных $\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}$ в уравнении (III.4), то, очевидно,

$$\bar{A}_{kl}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}. \qquad \text{(III.5)}$$

Фиксируем определённую точку пространства, и пусть в этой точке

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_i}=\alpha_{ki}. \qquad \text{(III.6)}$$

Формулы преобразования

$$\bar{A}_{kl}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\alpha_{ki}\alpha_{lj} \qquad \text{(III.7)}$$

совпадают с формулами преобразования коэффициентов квадратичной формы

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}p_i p_j, \qquad \text{(III.8)}$$

если сделать в ней замену переменных:

$$p_i=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}q_k, \qquad \text{(III.9)}$$

переводящую её в форму

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\bar{A}_{kl}q_k q_l. \qquad \text{(III.10)}$$

Для того чтобы формулы (III.9) давали взаимнооднозначную замену переменных, необходимо, разумеется, потребовать, чтобы определитель $|\alpha_{ki}|$ был отличен от нуля.

Если мы хотим, чтобы замена переменных помогла нам как-либо упростить уравнение (III.1), мы можем вместо этой задачи рассмотреть другую задачу об упрощении вида квадратичной формы (III.8) при помощи замены переменных (III.9) с вещественными α_{ki}.

Такая задача встречается в курсе аналитической геометрии при упрощении уравнений поверхностей 2-го порядка. Здесь эта задача будет ещё проще, так как мы не связаны ортогональностью преобразований, и нам нет надобности требовать, чтобы в пространстве $p_1, p_2, \ldots, p_n$ направления осей $q_1, q_2, \ldots, q_n$ были ортогональны.

В курсе линейной алгебры доказывается, что всегда можно выбрать коэффициенты преобразования таким образом, чтобы квадратичная форма (III.8) приняла вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}p_ip_j = \sum_{l=1}^{n} k_l q_l^2, \tag{III.11}$$

где k_l — некоторые числа, положительные или отрицательные.

Справедлива следующая

Теорема 1. (Закон инерции квадратичных форм.) *Каким бы способом ни производить приведение квадратичной формы* (III.8) *к виду* (III.11) *с линейно независимыми* $q_1, q_2, \ldots, q_n$, *при этом всегда остаётся неизменным число положительных коэффициентов среди* $k_1, k_2, \ldots, k_n$, *а также число отрицательных коэффициентов.*

Отсюда, между прочим, следует, что число коэффициентов k_n, не равных нулю, также одинаково при всех представлениях (III.11).

Теорема эта также доказывается в курсах линейной алгебры, но мы приведём здесь её доказательство.

Приведя нашу форму двумя способами к сумме квадратов, мы получим равенство

$$\sum_{l=1}^{n} k_l q_l^2 = \sum_{s=1}^{n} \rho_s m_s^2, \tag{III.12}$$

где m_s и q_l — координаты пространства, выбранные в обоих случаях, связаны между собой линейными соотношениями

$$m_s = \sum_{l=1}^{n} \beta_{sl} q_l.$$

Допустим, что число положительных k_l больше, чем число положительных ρ_s. Приравняем нулю все те q_l, коэффициенты при квадратах которых не положительны (отрицательны или равны нулю). Если считать, что

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_r > 0 \geqslant k_{r+1} \geqslant k_{r+2} \geqslant \ldots \geqslant k_n,$$

то положим

$$q_{r+1} = q_{r+2} = \ldots = q_n = 0.$$

Приравняем теперь нулю все те m_s, коэффициенты при квадратах которых в правой части (III.12) положительны. Мы получим таким путём систему уравнений для определения $q_1, q_2, \ldots, q_r$. Ввиду того, что число этих уравнений меньше, чем число неизвестных, мы можем всегда найти решение этой системы, в котором не все $q_1, q_2, \ldots, q_r$ обращаются в нуль. Подставляя эти значения $q_1, q_2, \ldots, q_r$ в уравнение (III.12), мы видим, что левая часть его будет положительна, а правая неположительна, следовательно, равенство (III.12) не имеет места, и наше предположение неверно.

Теорема доказана.

Эта теорема позволяет получить классификацию уравнений в частных производных 2-го порядка.

В каждой точке пространства переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ мы можем совершить замену независимых переменных p_i таким образом, чтобы в этой точке форма

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}p_ip_j$$

превратилась в сумму квадратов с некоторыми коэффициентами:

$$\sum_{i=1}^{n} k_ir_i^2.$$

Далее, простая замена

$$q_i = \sqrt{|k_i|}\,r_i$$

превращает нашу форму в выражение

$$\sum_{i=1}^{r} q_i^2 - \sum_{i=r+1}^{m} q_i^2, \qquad \text{(III.13)}$$

где r — число положительных коэффициентов k_i, а m — общее число коэффициентов, не равных нулю.

Допустим теперь, что подстановка (III.9), приводящая основную форму (III.8) к виду (III.13), найдена и записывается формулами

$$p_i = \sum_{k=1}^{n} \overset{*}{\alpha}_{ik}q_k.$$

Введём линейную замену независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в нашем пространстве с помощью формул

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} \overset{*}{\alpha}_{ki}x_i.$$

При этом в формуле (III.6) $\alpha_{ki} = \overset{*}{\alpha}_{ki}$ и, следовательно, в рассматриваемой точке пространства все $\overline{A}_{ki}$ при $i \neq k$ будут равны нулю, а $\overline{A}_{ii}$ — либо ± 1, либо нулю. Совокупность членов уравнения, содержащих вторые производные, примет вид

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} - \sum_{i=r+1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}.$$

Если уравнение (III.1) имеет постоянные коэффициенты, то линейная замена переменных переведёт его снова в уравнение с постоянными коэффициентами. Следовательно, мы сумеем в этом случае во всём пространстве привести уравнение к такому виду, когда в новых координатах все коэффициенты при смешанных производных 2-го порядка обратятся в нуль, а коэффициенты при тех производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, которые не обратятся в нуль, будут равны ± 1. Этот вид мы будем называть каноническим.

Как мы увидим в дальнейшем, характер уравнения 2-го порядка полностью определится числом r положительных и числом s отрицательных коэффициентов после такого преобразования. Если мы будем рассматривать уравнения с переменными коэффициентами, то такое приведение к каноническому виду сразу во всём пространстве становится невозможным, и мы вынуждены будем ограничиться приведением к каноническому виду в каждой точке пространства отдельно. При этом в различных точках мы будем получать, возможно, разные значения чисел r и s. Бывает удобно, разбив пространство на части, где r и s постоянны, исследовать уравнение порознь в каждой части.

Введём теперь понятие о типе уравнения в частных производных 2-го порядка. В области, где r и s сохраняют постоянные значения, мы будем говорить, что уравнение принадлежит к типу (r, s); очевидно, что типы (r, s) и (s, r) по существу совпадают, так как перемена знаков у всех коэффициентов меняет r и s местами. Уравнение колебаний струны имеет тип (1, 1) при $n = 2$. Уравнение колебаний мембраны относится к типу (2, 1) при $n = 3$. Уравнение передачи тепла принадлежит к типу (3, 0) при $n = 4$, уравнение Лапласа — к типу (3, 0) при $n = 3$.

Мы будем называть тип $(n, 0)$ эллиптическим типом, типы (r, s), где $r + s = n$, $s > 0$, $r > 0$, гиперболическими. Из них тип $(n - 1, 1)$ мы будем называть нормально-гиперболическим. Типы (r, s), где $r + s < n$, будут называться параболическими.

Нормально-параболическим назовём тип $(n - 1, 0)$. Параболические типы, где $s = 0$, будут называться эллиптико-параболическими, а типы, где $r > 0$ и $s > 0$, — гиперболо-параболическими.

Уравнения колебаний струны и мембраны (I.9) и (I.13) принадлежат, очевидно, к нормально-гиперболическому типу, уравнение теплопроводности (I.19) — к нормально-параболическому, а уравнение Лапласа — к эллиптическому.

В нашем курсе мы ограничимся лишь изучением нормально-гиперболического, нормально-параболического и эллиптического типов. Все уравнения, рассмотренные нами в лекции I, имели канонический вид и относились именно к этим типам. Мы видим, таким образом, что эти уравнения не сводимы одно к другому вещественными преобразованиями координат и что каждое из них является в некотором роде типичным.

Замечание. Координатная система, в которой уравнение принимает канонический вид, не является единственной.

Уравнение Лапласа $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ остаётся инвариантным при любом переносе начала координат и ортогональном преобразовании координат.

В самом деле, коэффициенты A_{kl} после такого поворота будут иметь вид

$$\bar{A}_{kl} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{il},$$

где

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \cos(y_k, \hat{x}_i),$$

и, так как в силу условий ортогональности

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{il} = \begin{cases} 1 & (k = l), \\ 0 & (k \neq l), \end{cases} \quad \text{то} \quad \bar{A}_{kl} = \begin{cases} 1 & (k = l), \\ 0 & (k \neq l), \end{cases}$$

что и требовалось доказать. Преобразования независимых переменных, оставляющие волновое уравнение инвариантным, носят название преобразований Лоренца. Они играют важную роль в теории относительности.

§ 2. Канонический вид уравнений с двумя независимыми переменными.

Как мы видели, уравнение с переменными коэффициентами всегда может быть приведено к каноническому виду в отдельной точке пространства. Если число независимых переменных больше двух, то привести уравнение к каноническому виду во всей области задания уравнения можно лишь в исключительных случаях. Однако уравнение с двумя независимыми переменными всегда может быть приведено к каноническому виду во всей области изменения независимых переменных. Рассмотрим этот вопрос подробнее. В случае двух переменных сумма членов, содержащих вторые производные, может быть записана в виде

$$Lu \equiv A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Мы будем называть эту сумму главным членом оператора 2-го порядка.

Оператор Lu после перехода к новым переменным $\xi=\xi(x, y)$, $\eta=\eta(x, y)$ примет вид

$$Lu=\left[A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+$$
$$+2\left[A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)+C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+$$
$$+\left[A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{\partial u}{\partial\xi}L\xi+\frac{\partial u}{\partial\eta}L\eta=$$
$$=L_1 u+\frac{\partial u}{\partial\xi}L\xi+\frac{\partial u}{\partial\eta}L\eta.$$

Через $L_1 u$ здесь обозначен главный член оператора в новых переменных. Для того чтобы после преобразования координат уравнение имело канонический вид, необходимо, во-первых, чтобы обратился в нуль коэффициент при смешанной производной

$$B_1=A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)+C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

и, во-вторых, чтобы имело место равенство

$$A_1=\pm C_1,$$

если уравнение принадлежит эллиптическому или гиперболическому типу, и $A_1=0$ или $C_1=0$, если уравнение параболического типа.

Из курса аналитической геометрии известно, что канонический вид формы

$$Ap^2+2Bpq+Cq^2,$$

коэффициенты которой преобразуются так же, как коэффициенты оператора Lu, определяется знаком её дискриминанта

$$\Delta=B^2-AC,$$

а именно:

если $\Delta<0$, форма эллиптическая и приводится к виду $r_1^2+r_2^2$;
если $\Delta>0$, форма гиперболическая и приводится к виду $r_1^2-r_2^2$;
если $\Delta=0$, форма параболическая и приводится к виду r_1^2.

В последнем случае мы исключили возможность полного вырождения формы ($A=B=C=0$). Рассмотрим сначала параболический случай. Если $\Delta=0$, то $B^2=AC$ и, значит, по крайней мере один из коэффициентов A и C не равен нулю. Пусть $A\neq 0$. Положим

$$k=\frac{B}{A}=\frac{C}{B}.$$

(Если $B=0$, то и $C=0$ и, значит, уравнение уже имеет канонический вид.) Имеем:

$$A_1 = A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + k\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2;$$

$$C_1 = A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 = A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} + k\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2;$$

$$B_1 = A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} =$$
$$= A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + k\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} + k\frac{\partial\eta}{\partial y}\right).$$

Для того чтобы обратились в нуль коэффициенты B_1 и C_1 одновременно, достаточно положить

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} + k\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0. \qquad \text{(III.14)}$$

Уравнение (III.14) есть уравнение 1-го порядка для неизвестной функции $\eta(x, y)$. Любое из решений этого уравнения мы примем за новое независимое переменное η. В новых переменных ξ, η главный член уравнения примет вид

$$A_1\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}.$$

Коэффициент A_1 нигде не может обращаться в нуль, так как ни A, ни $\frac{\partial\xi}{\partial x} + k\frac{\partial\xi}{\partial y}$ в нуль не обращаются. В самом деле, $A \neq 0$ по условию, а выражение $\frac{\partial\xi}{\partial x} + k\frac{\partial\xi}{\partial y}$ могло бы обратиться в нуль лишь в тех точках, где линии $\xi = \text{const.}$ и $\eta = \text{const.}$ параллельны, а таких точек быть не может. Разделив уравнение на A_1, приведём главный член к виду $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$. Полезно отметить, что уравнение (III.14) определяет лишь семейство линий $\eta = \text{const.}$, причём остаётся некоторый произвол для выбора функции $\xi(x, y)$.

В случае, если уравнение 2-го порядка в частных производных принадлежит к эллиптическому или гиперболическому типу, легко добиться обращения в нуль коэффициента B_1. Полное приведение к каноническому виду уравнения эллиптического типа является сложной задачей, на которой мы не будем останавливаться. Уравнение гиперболического типа, как мы сейчас покажем, всегда легко преобразовать к каноническому виду.

Разберём вначале случай, когда линейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными не принадлежит к параболическому типу и коэффициент A не обращается в нуль (случай $C \neq 0$, $A = 0$ рассматривается аналогично; случай $A = C = 0$ мы выделим особо). Итак, пусть $A \neq 0$. Положим

$$\xi = x, \qquad \eta = \varphi(x, y).$$

Тогда $\frac{\partial\xi}{\partial y}=0$, $\frac{\partial\xi}{\partial x}=1$, и условие обращения коэффициента B_1 в нуль примет вид

$$A\frac{\partial\eta}{\partial x}+B\frac{\partial\eta}{\partial y}=0. \tag{III.15}$$

Принимая опять за η любое решение уравнения (III.15), получим систему координат, в которой уравнение имеет требуемый вид.

Этот вид не будет каноническим, так как в этой форме коэффициенты при вторых производных, вообще говоря, не равны положительной или отрицательной единице.

Если $A=C=0$, то уравнение имеет главный член вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$

и является гиперболическим. Легко видеть, что в этом случае оно приводится подстановкой

$$\xi=x+y,\quad \eta=x-y$$

к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\dots$$

Из этого видно, что приведение гиперболического уравнения к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\dots$$

решило бы полностью нашу задачу. Кроме того, во многих вопросах именно этот вид является наиболее удобным, поэтому мы посвятим ему особый параграф.

§ 3. Второй канонический вид гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными.

Вторым каноническим видом для уравнений в частных производных 2-го порядка гиперболического типа с двумя независимыми переменными называется такая форма уравнения, при которой оно не содержит производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Из формул предыдущего параграфа вытекает, что для приведения уравнения к этому виду нужно найти функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$, удовлетворяющие уравнениям

$$A_1\equiv A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2=0,$$

$$C_1\equiv A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2=0.$$

Эти уравнения, по сути дела, совпадают, поэтому нам нужно найти два независимых решения одного уравнения. Это уравнение может быть написано в виде

$$A\left(\frac{\frac{\partial\chi}{\partial x}}{\frac{\partial\chi}{\partial y}}\right)^2+2B\frac{\frac{\partial\chi}{\partial x}}{\frac{\partial\chi}{\partial y}}+C=0, \tag{III.16}$$

где через χ обозначена одна из функций ξ, η. Вдоль линии $\chi=\text{const.}$ мы имеем

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial\chi}{\partial x}}{\frac{\partial\chi}{\partial y}},$$

поэтому уравнение (III.16) переписывается в виде

$$Ay'^2-2By'+C=0.$$

В таком виде оно представляет собой квадратное уравнение относительно y'. Условие $B^2-AC>0$ обеспечивает существование двух различных вещественных корней

$$\left.\begin{aligned} y_1'&=\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A};\\ y_2'&=\frac{B-\sqrt{B^2-AC}}{A}. \end{aligned}\right\} \tag{III.17}$$

Взяв интегральные кривые первого и второго из уравнений (III.17) соответственно за линии $\xi=\text{const.}$ и $\eta=\text{const.}$, мы получим решение нашей задачи.

§ 4. Характеристики.

Введение соответственно подобранных переменных ξ и η избавило нас в уравнении гиперболического типа с двумя переменными от членов, содержащих $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$.

В общем случае n переменных мы также могли бы, выбрав координаты $y_1, y_2, \ldots, y_n$, добиться, например, того, чтобы в уравнение не вошёл член, содержащий $\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}$. Мы видели, что коэффициент при этой производной выражается формулой

$$\overline{A}_{11}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\alpha_{1i}\alpha_{1j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial y_1}{\partial x_i}\frac{\partial y_1}{\partial x_j}. \tag{III.18}$$

Рассмотрим поверхность

$$y_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0,$$

предполагая, что справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_i}\right)^2>0,$$

которое обеспечивает отсутствие особых точек на поверхностях $y_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\text{const}$. Это условие может быть выполнено всегда, если поверхность $y_1=0$ достаточно гладкая и семейство поверхностей $y_1=C$, при переменном C, заполняет некоторую часть пространства. Любая гладкая поверхность с уравнением $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ может быть принята за поверхность $y_1=0$.

Рассмотрим условие обращения в нуль коэффициента $\overline{A}_{11}$ на поверхности $y_1=0$. Из курса дифференциального исчисления известны формулы

$$\cos(nx_i)=\frac{\frac{\partial y_1}{\partial x_i}}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_k}\right)^2}},$$

где $\cos(nx_i)$ обозначает косинус угла между нормалью к поверхности $y_1=0$ и осью x_i. Уравнение $\overline{A}_{11}=0$ переписывается таким образом в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\cos(nx_i)\cos(nx_j)=0.$$

Это уравнение показывает, что обращение $\overline{A}_{11}$ в нуль на поверхности $y_1=0$ есть индивидуальное свойство этой поверхности, совершенно не зависящее от выбора переменных $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

Определение. *Поверхность*

$$y_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=c_0$$

называется характеристикой уравнения (III.1), *если при замене переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *на переменные* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *где* $y_2, \ldots, y_n$ — *произвольные функции* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *коэффициент* $\overline{A}_{11}$ *при* $\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}$ *обращается в нуль при* $y_1=c_0$.

Нетрудно проверить, что уравнения эллиптического типа не имеют вещественных характеристик, ибо $\overline{A}_{11}$ представляет собою положительно определённую квадратичную форму относительно α_{i1} и не может обратиться в нуль.

Если для уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=F$$

поверхность $x_1=0$ есть характеристика, т. е. $A_{11}\big|_{x_1=0}=0$, то это уравнение представляет собою дифференциальное уравнение, связывающее $u|_{x_1=0}$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}$. В самом деле, мы можем переписать его при $x_1 = 0$ в виде:

$$2\sum_{i=2}^{n} A_{1i}\Big|_{x_1=0} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}\right) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} A_{ij}\Big|_{x_1=0} \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\left(u|_{x_1=0}\right) +$$
$$+ B_1|_{x_1=0}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}\right) + \sum_{i=2}^{n} B_i|_{x_1=0} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u|_{x_1=0}\right) +$$
$$+ C|_{x_1=0}\left(u|_{x_1=0}\right) = F|_{x_1=0}. \qquad \text{(III.19)}$$

Задачей Коши для уравнения 2-го порядка в общем виде называют задачу о нахождении решения этого уравнения, удовлетворяющего на некоторой поверхности S условиям:

$$u|_S = \varphi_0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \varphi_1.$$

Мы видели выше на примерах, что к этой задаче приводит, в частности, рассмотрение колебаний струны или мембраны, когда в начальный момент времени задаются положения и скорости частиц колеблющегося тела.

Полезно заметить, что, вообще говоря, нет надобности задавать именно нормальную производную $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S$. В самом деле, задание самой неизвестной функции на S позволяет определить все её производные в касательной плоскости, а знание нормальной производной позволяет найти значение градиента функции на поверхности S. Этой же цели мы достигнем, если нам будет известна в каждой точке поверхности производная от u по любому некасательному направлению.

Из равенства (III.19) следует, что в случае, когда поверхность $x_1 = 0$ есть характеристика, $u|_{x_1=0}$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}$ не являются независимыми функциями переменных $x_2, x_3, \ldots, x_n$, и задачу Коши для этой поверхности $x_1 = 0$ ставить нельзя, ибо, задавая произвольно $u|_{x_1=0}$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}$, мы придём к противоречию с уравнением (III.19).

Предыдущие рассуждения показывают, что на характеристических поверхностях нельзя задавать произвольно функцию и какую-либо составляющую градиента, не лежащую в касательной плоскости.

ЛЕКЦИЯ IV.

УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ И ЕГО РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ДАЛАМБЕРА.

§ 1. Формула Даламбера. Неограниченная струна.

Приводя ко второму каноническому виду уравнение свободных колебаний струны, т. е. уравнение колебаний в отсутствии внешних поперечных сил

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{IV.1}$$

где $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, мы положим

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - at, \\ \eta &= x + at. \end{aligned}\right\} \tag{IV.2}$$

Тогда уравнение (IV.1) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0. \tag{IV.3}$$

Решение уравнения (IV.3) легко получается в общем виде, причём это общее решение, в противоположность тому общему положению, о котором мы говорили в лекции II, позволяет также легко получать решения различных конкретных задач.

Из (IV.3) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \psi_2'(\eta), \tag{IV.4}$$

где $\psi_2'(\eta)$ — произвольная функция.

Из (IV.4) находим:

$$u = \psi_2(\eta) + \psi_1(\xi),$$

где $\psi_1(\xi)$ — произвольная функция. Возвращаясь к переменным x, t, получаем:

$$u = \psi_1(x - at) + \psi_2(x + at). \tag{IV.5}$$

Полученное решение зависит от двух произвольных функций ψ_1 и ψ_3. Оно называется решением Даламбера.

Для того чтобы решить ту или иную задачу математической физики, мы должны лишь в каждом конкретном случае определить ψ_1 и ψ_2.

Рассмотрим прежде всего задачу Коши для неограниченной струны, т. е. задачу отыскания решения, удовлетворяющего условиям

$$\left.\begin{aligned} u\big|_{t=0} &= \varphi_0(x), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= \varphi_1(x). \end{aligned}\right\} \tag{IV.6}$$

Подставляя формулу (IV.5) в (IV.6), будем иметь:

$$\psi_1(x) + \psi_2(x) = \varphi_0(x),$$
$$-a\psi_1'(x) + a\psi_2'(x) = \varphi_1(x),$$

откуда

$$-a\psi_1(x) + a\psi_2(x) = \int_0^x \varphi_1(x)\,dx + aC,$$

где C — произвольная постоянная, или

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x) - \frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(x)\,dx - C\right],$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x) + \frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(x)\,dx + C\right].$$

При этом

$$u = \frac{1}{2}\Bigg[\varphi_0(x - at) - \frac{1}{a}\int_0^{x-at} \varphi_1(y)\,dy - C + \varphi_0(x + at) +$$
$$+ \frac{1}{a}\int_0^{x+at} \varphi_1(y)\,dy + C\Bigg],$$

и окончательно получаем формулу

$$u = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x - at) + \varphi_0(x + at) + \frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(y)\,dy\right]. \tag{IV.7}$$

Очевидно, что полученное решение удовлетворяет уравнению (IV.1), а также начальным условиям. Способ вывода (IV.7) доказывает единственность решения поставленной задачи. Несомненна, далее, корректность постановки задачи. Для каждого $\varepsilon > 0$ мы можем указать такое η, что если мы заменим $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ на $\varphi_0^{(1)}(x)$ и $\varphi_0^{(1)}(x)$ так, что

$$|\varphi_0(x) - \varphi_0^{(1)}(x)| < \eta, \quad |\varphi_1(x) - \varphi_1^{(1)}(x)| < \eta,$$

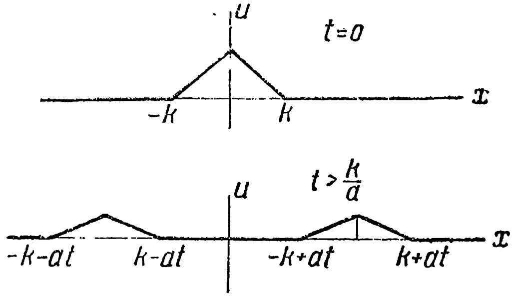
то разность между новым решением и первоначальным будет по абсолютной величине меньше ε на любом конечном отрезке времени. Таким образом, решение задачи зависит от начальных данных непрерывно до порядка (0,0). Полезно проследить несколько подробнее качественную картину колебания неограниченной струны. Разберём несколько простейших случаев.

Случай 1. Функция $\varphi_1(x)$ тождественно равна 0, функция $\varphi_0(x)$ отлична от нуля лишь в конечном промежутке $-k \leqslant x \leqslant k$.

Решение (IV.7) выражается при этом формулой

$$u = \frac{1}{2}[\varphi_0(x - at) + \varphi_0(x + at)];$$

слагаемое $\frac{1}{2}\varphi_0(x - at)$ есть постоянное по форме возмущение, передвигающееся со скоростью a в положительном направлении по оси x. Это ясно из того, что, поместив начало подвижной системы координат ξ в точке at, т. е. полагая $\xi = x - at$, мы будем видеть возмущение постоянным. Аналогично, слагаемое $\frac{1}{2}\varphi_0(x + at)$ есть такое же по форме возмущение, идущее в другую сторону. Возмущения эти называются волнами. Первое — прямая волна, а второе — обратная волна. Вначале волны налегают одна на другую, а затем расходятся и потом всё больше разбегаются в разные стороны друг от друга.



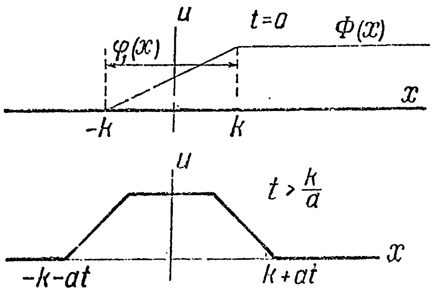
Черт. 4.

В каждом месте струны после прохождения обеих волн (а для точек, лежащих вне области начального возмущения, после прохождения только одной) воцаряется покой. Схематически вид возмущённой струны изображён на черт. 4.

Случай 2. Функция $\varphi_0(x)$ тождественно равна нулю, а $\varphi_1(x)$ отлична от нуля лишь в конечном промежутке $-k \leqslant x \leqslant k$. В таком случае говорят иногда, что струна не имеет начального возмущения, а имеет лишь начальный импульс.

Рассмотрим функцию $\Phi_1(x)$, первообразную для $\varphi_1(x)$, равную нулю при значениях x в промежутке $-\infty < x \leqslant -k$. При $x \geqslant k$ она будет равна некоторой постоянной, значение которой, вообще говоря, отлично от нуля. Очевидно, эта постоянная равна

$$\int_{-k}^{k} \varphi_1(x)\,dx.$$



Черт. 5.

Формула (IV.7) даёт:

$$u = \frac{1}{2a}[\Phi(x + at) - \Phi(x - at)].$$

В этом случае по струне опять бегут две волны — одна прямая и одна обратная. Волны эти будут отличаться лишь знаком одна от другой.

Там, где обе волны — и прямая, и обратная — уже прошли, струна примет положение покоя, но не вернётся, вообще говоря, к исходному положению, так как $x + at > k$ и $\Phi(x + at)$ будет при этом равна постоянной, а $x - at < k$ и $\Phi(x - at)$ равна нулю. В струне останется так называемое остаточное смещение. Форма отклонения струны в этом случае изображена на черт. 5.

Легко убедиться в том, что можно было бы так задать начальное возмущение и начальную скорость струны, чтобы получить волну, идущую в одном направлении. Для этого нужно лишь, чтобы обратные волны, вызванные начальным смещением и начальным импульсом, отличались одна от другой только знаком.

§ 2. Струна с двумя закреплёнными концами.

Рассмотрим теперь струну с закреплёнными концами и будем искать решение при условиях (IV.6) и условиях

$$u|_{x=0} = 0 \text{ и } u|_{x=l} = 0.$$

Функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ в этом случае, очевидно, будут заданы только в промежутке $0 \leqslant x \leqslant l$.

Возвращаясь к формуле (IV.5), мы видим, что нужно определить $\psi_1(x)$ в промежутке от $-\infty$ до l, а $\psi_2(x)$ в промежутке от 0 до $+\infty$. Подставляя в решение (IV.5) $x = 0$ и $x = l$, получим:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(-at) + \psi_2(at) &= 0, \\ \psi_1(l - at) + \psi_2(l + at) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV.8)}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(-x)+\psi_2(x)&=0, & 0\leqslant x<\infty; \\ \psi_1(-x)+\psi_2(x+2l)&=0, & -l\leqslant x<\infty. \end{aligned}\right\} \qquad (IV.8')$$

Всякие две функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$, удовлетворяющие (IV.8′), дают решение поставленной задачи.

Первое из условий (IV.8′) позволяет выразить функцию $\psi_2(x)$ при положительных значениях аргумента через $\psi_1(x)$ при отрицательных значениях аргумента. Подставляя значение функции $\psi_2(x)$, определяемое из первого условия, во второе, получим:

$$\psi_1(-x)-\psi_1(-x-2l)=0. \qquad (IV.9)$$

Эта формула говорит нам, что функция $\psi_1(x)$ должна быть периодической с периодом $2l$ во всей области, где она нас интересует.

Рассматривая систему (IV.8′) как систему уравнений с двумя неизвестными функциями, мы видим, что первое из этих уравнений можно рассматривать как определение $\psi_2(x)$. Очевидно, что эта система полностью эквивалентна уравнению (IV.9), удовлетворение которого обеспечивает удовлетворение второго из уравнений (IV.8). Формулируем полученный результат.

Нами доказано, что всякое решение уравнения (IV.1) при условиях (IV.8) выражается через произвольную периодическую функцию $\psi_1(x)$ с периодом $2l$, заданную в промежутке $-\infty<x\leqslant l$, по формуле

$$u=\psi_1(x-at)-\psi_1(-x-at). \qquad (IV.10)$$

Не ограничивая общности, можно распространить $\psi_1(x)$ на всю прямую $-\infty<x<+\infty$. При этом формула (IV.10) для промежутка $-\infty<x<+\infty$ даёт то решение задачи колебания неограниченной струны, которое на отрезке $0\leqslant x\leqslant l$ совпадает с искомым

Полагая в (IV.10) $t=0$, видим, что

$$u|_{t=0}=\psi_1(x)-\psi_1(-x),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=-a[\psi_1'(x)-\psi_1'(-x)].$$

Но $\psi_1(x)-\psi_1(-x)$ есть, как легко видеть, нечётная функция, имеющая, по доказанному, период $2l$. Такую функцию легко построить полностью по её значениям на отрезке $0\leqslant x\leqslant l$, где имеем равенство

$$\psi_1(x)-\psi_1(-x)=\varphi_0(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l.$$

Аналогично, исходя из равенства

$$-a\psi_1'(x)+a\psi_1'(-x)=\varphi_1(x) \text{ при } 0\leqslant x\leqslant l,$$

легко построим $-a[\psi_1'(x)-\psi_1'(-x)]$ везде как нечётную периодическую функцию. Это равносильно продолжению функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ на всю прямую нечётным периодическим образом.

После того как функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ построены на всей прямой, $\psi_1(x)$ можно без труда найти таким же образом, как мы это делали в случае неограниченной струны.

Отсюда следует, что решение нашей задачи должно выражаться той же формулой (IV.7), если в ней считать $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ нечётными периодическими функциями. Формула (IV.7) действительно даёт искомое решение, так как из нечётности начальных условий следует, что $u|_{x=0}=0$; точка же $x=l$ ничем не отличается от точки $x=0$.

Необходимо сделать одно важное замечание. Строго говоря, функция, даваемая формулой (IV.5), будет удовлетворять уравнению в том случае, если $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ непрерывны вместе со своими производными до 2-го порядка.

Возникает вопрос, будет ли полученное нами решение обладать этим свойством.

Очевидно, это можно гарантировать, если $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ после своего продолжения будут удовлетворять этому условию. Слушатели могут сами проверить, что для этого необходимо иметь

$$\varphi_0(l)=\varphi_0''(l)=\varphi_0(0)=\varphi_0''(0)=0,$$
$$\varphi_1(l)=\varphi_1''(l)=\varphi_1(0)=\varphi_1''(0)=0.$$

Однако можно рассматривать и функции, не удовлетворяющие всем этим условиям. Тогда приходится соответствующим образом обобщить класс рассматриваемых решений уравнения (IV.1).

Этот вопрос мы рассмотрим позднее.

§ 3. Решение задачи для неоднородного уравнения и для более общих граничных условий.

Рассмотрим теперь более общую задачу. Пусть требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=p(x,t) \tag{IV.11}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} \alpha u\Big|_{x=0}+\beta\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}&=f_1(t),\\ \gamma u\Big|_{x=l}+\delta\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}&=f_2(t)\end{aligned}\right\} \tag{IV.12}$$

и

$$\left.\begin{aligned} u|_{t=0}&=\varphi_0(x),\\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}&=\varphi_1(x).\end{aligned}\right\} \tag{IV.13}$$

Отметим, что решение ищется в области, определяемой неравенствами $0 < x < l$ и $0 < t$.

Прежде всего заметим, что легко построить некоторое частное решение уравнения (IV.11), не удовлетворяющее, правда, условиям (IV.12) и (IV.13).

Вводя переменные ξ и η, при помощи формул

$$\xi = x - at,$$

$$\eta = x + at \quad \text{(IV.14)}$$

преобразуем уравнение (IV.11) к виду

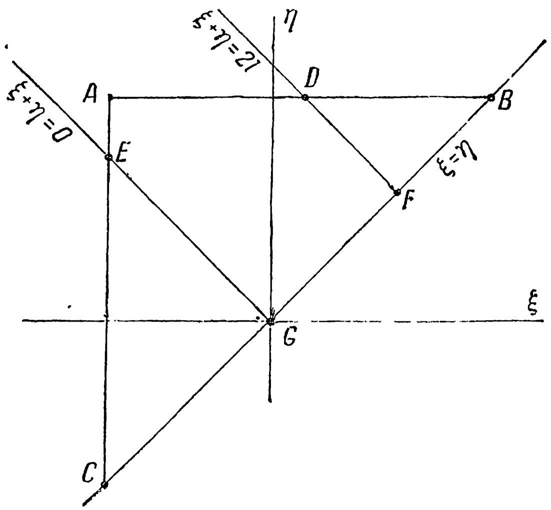
$$4\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} = Q(\xi, \eta). \quad \text{(IV.15)}$$

Область изменения переменных ξ и η будет:

$$\eta - \xi > 0, \quad \text{(IV.16)}$$

$$0 < \xi + \eta < 2l; \quad \text{(IV.17)}$$

на чертеже это будет полуполоса (черт. 6).



Черт. 6.

Продолжим функцию $Q(\xi, \eta)$ совершенно произвольным образом за обе прямые

$$\xi + \eta = 0,$$

$$\xi + \eta = 2l,$$

определив её во всей полуплоскости (IV.16). Если мы найдём решение уравнения (IV.15) во всей полуплоскости, то оно, очевидно, будет удовлетворять нашему уравнению и в полосе, определяемой неравенствами (IV.16) и (IV.17). Будем искать частное решение v_1 уравнения (IV.15). Полагая

$$\frac{\partial v_1}{\partial\eta} = z(\xi, \eta), \quad \text{(IV.18)}$$

из (IV.15) получим

$$\frac{\partial z}{\partial\xi} = \frac{1}{4}Q(\xi, \eta); \quad \text{(IV.19)}$$

частное решение (IV.19) имеет вид

$$z(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\int_{\eta}^{\xi} Q(\alpha, \eta)\,d\alpha. \quad \text{(IV.20)}$$

Далее, частное решение (IV.18) будет:

$$v_1 = \int_\xi^\eta z(\xi, \beta)\, d\beta \tag{IV.21}$$

или, сопоставляя (IV.20) и (IV.21), имеем частное решение уравнения (IV.15) в виде

$$v_1 = \frac{1}{4}\int_\xi^\eta \left[\int_\beta^\xi Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\right] d\beta = -\frac{1}{4}\int_\eta^\xi \left[\int_\beta^\xi Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\right] d\beta. \tag{IV.22}$$

Интеграл (IV.22) взят по области

$$\xi < \alpha < \beta < \eta,$$

которая представляет собой треугольник ABC (см. черт. 6), где координаты точки A будут ξ и η.

Иначе

$$v_1 = -\frac{1}{4}\iint_{\Delta ABC} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

Заметим теперь, что этот интеграл разбивается на сумму трёх других:

$$v_1 = -\frac{1}{4}\iint_{\Delta CEG} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta - \frac{1}{4}\iint_{\Delta DBF} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta - \\ - \iint_{ADFGE} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$

(обозначения понятны сами собой).

Треугольник CEG зависит только от координаты ξ точки A, а треугольник DBF — только от координаты η этой точки. Точка A берётся внутри полуполосы.

Следовательно,

$$-\frac{1}{4}\iint_{\Delta CEG} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = w_1(\xi), \qquad -\frac{1}{4}\iint_{\Delta DBF} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = w_2(\eta).$$

Если функция v_1 удовлетворяет уравнению (IV.15), то и функция

$$v = v_1 - w_1(\xi) - w_2(\eta) = -\frac{1}{4}\iint_{ADFGE} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta \tag{IV.23}$$

будет удовлетворять тому же уравнению.

Если преобразовать в интеграле (IV.23) переменные, вернувшись к x и t, мы получим:

$$\frac{D(\alpha, \beta)}{D(x, t)} + \begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a,$$

откуда

$$v = -\frac{a}{2} \iint\limits_{ADFGE} p(x, t)\, dx\, dt, \tag{IV.24}$$

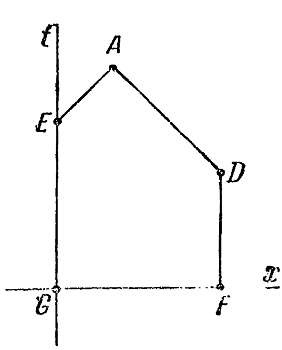
где $ADFGE$ имеет вид, изображённый на черт. 7.

Решение поставленной задачи мы будем искать в виде частного решения неоднородного уравнения и решения однородного уравнения, удовлетворяющего предельным условиям. Для этого введём вместо u новую искомую функцию по формуле

$$w = u - v. \tag{IV.25}$$

Тогда функция w будет удовлетворять однородному уравнению колебаний струны и условиям того же типа, что (IV.12) и (IV.13).

Рассматривая задачу, мы можем с самого начала считать, что $p(x, t) = 0$, а условия (IV.12) и (IV.13) считать уже преобразованными по формуле (IV.25).



Черт. 7.

Наша замена не нарушает единственности и существования решения. Если задача в первоначальной постановке была корректной, то она остаётся такой же и после замены. В самом деле, решение w непрерывно зависит от начальных условий. Новые условия для w будут непрерывно связаны с v и, следовательно, с функцией $p(x, t)$. Поэтому малые отклонения в $p(x, t)$, f_1, f_2 будут давать малые отклонения в решении u.

Решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{IV.1}$$

можно искать опять в прежней форме:

$$u = \psi_1(x - at) + \psi_2(x + at). \tag{IV.5}$$

Начальные условия (IV.13) позволяют, как и в первой задаче, определить функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ в промежутке

$$0 \leqslant x \leqslant l.$$

Функция u определяется при этом в треугольнике, лежащем в полосе и опирающемся на ось абсцисс ($t > 0$) черт. 8, Посмотрим, можно ли удовлетворить условиям (IV.12), выбирая нужным образом продолжение $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ во всей области, которая нас интересует.

Подстановка уравнения (IV.5) в (IV.12) даёт

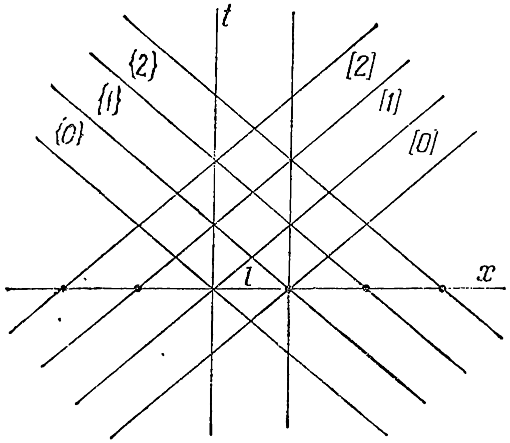
$$\left.\begin{aligned}&\alpha\psi_1(-at)+\beta\psi_1'(-at)+\alpha\psi_2(at)+\beta\psi_2'(at)=f_1(t),\\&\gamma\psi_1(l-at)+\delta\psi_1'(l-at)+\gamma\psi_2(l+at)+\delta\psi_2'(l+at)=f_2(t).\end{aligned}\right\}\quad\text{(IV.26)}$$

В плоскости (x, t) можно провести два ряда полос, параллельных прямым $x-at=0$ и $x+at=0$, в которых удовлетворяются неравенства

$$-lk<x-at<-l(k-1), \qquad [\mathrm{k}]$$

$$ml<x+at<(m+1)l; \qquad \{\mathrm{m}\}$$

каждую такую полосу мы будем обозначать номером соответственно в квадратных или фигурных скобках (черт. 8).



Черт. 8.

Первое условие (IV.26) позволяет определить значение ψ_1 в полосе [m], если известно значение ψ_2 в полосе {m — 1}, а второе позволяет определить значение ψ_2 в полосе {k}, если известно ψ_1 в полосе [k — 1], при помощи решения обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Для этого достаточно, например, обозначить в первом из уравнений (IV.26) $-at$ через ξ, после чего оно получит вид

$$\alpha\psi_1(\xi)+\beta\psi_1'(\xi)=-\alpha\psi_2(-\xi)-\beta\psi_2'(-\xi)+f_1\left(-\frac{\xi}{a}\right), \qquad \text{(IV.27)}$$

а во втором из уравнений (IV.26) положим $l - at = \xi$, преобразуя его к виду

$$\gamma\psi_1(\xi) + \delta\psi_1'(\xi) = -\gamma\psi_2(2l - \xi) - \delta\psi_2'(2l - \xi) + f_2\left(\frac{l-\xi}{a}\right). \quad \text{(IV.28)}$$

Зная ψ_2 в $\{0\}$ и решая уравнение (IV.27) относительно ψ_1, мы получим значения ψ_1 в [1], а затем, решая (IV.28) относительно ψ_2, мы определим ψ_2 в $\{2\}$ и т. д. Произвольную постоянную мы определяем из условия непрерывности ψ_1 и ψ_2.

Так же точно, исходя из значений ψ_1 в [0] и решая уравнение (IV.28), получим значения ψ_2 в $\{1\}$, а затем, решая (IV.27) относительно ψ_1, мы получим значение ψ_1 в [2] и т. д.

Ясно, что таким образом можно удовлетворить всем поставленным условиям.

При этом не вызывает сомнений ни вопрос о существовании и единственности решения задачи, ни вопрос о её корректности.

Единственное обстоятельство, которое нам нужно будет проверить, заключается в том, что не ясно, будут ли построенные нами функции ψ_1 и ψ_2 допускать непрерывные производные 2-го порядка.

Мы предоставим слушателям вывести необходимые и достаточные условия для этого и ограничимся замечанием, что, расширяя класс решений уравнения (IV.1), можно отбросить требование непрерывности вторых производных функций ψ_1 и ψ_2.

Уравнение струны и аналогичные ему уравнения гиперболического типа с двумя независимыми переменными часто встречаются в разнообразных вопросах математической физики.

ЛЕКЦИЯ V.

МЕТОД РИМАНА.

§ 1. Первая краевая задача для гиперболических уравнений.

Для построения решения уравнения колебаний струны мы воспользовались основным свойством характеристик этого уравнения, позволившим сразу проинтегрировать уравнение (IV.3).

Это свойство состоит в том, что уравнение (IV.3) на характеристической линии $\xi = \text{const}$ превратилось в обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ с независимой переменной η. Поэтому функцию u нам удалось найти при помощи квадратур. Это же свойство характеристик — наличие уравнений с меньшим числом переменных, связывающих значения неизвестной функции и её производных, лежит в основе нескольких важных методов интегрирования уравнений в частных производных гиперболического типа.

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\, u = F(x, y); \qquad \text{(V.1)}$$

к такому виду, как мы видели, приводится любое линейное гиперболическое уравнение с двумя независимыми переменными. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Пусть дано значение u на двух пересекающихся прямых, параллельных координатным осям (т. е. на характеристиках):

$$\left.\begin{aligned} u|_{x=x_0} &= \varphi_1(y); \qquad & y_0 \leqslant y \leqslant b, \\ u|_{y=y_0} &= \varphi_2(x); \qquad & x_0 \leqslant x \leqslant a, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V.2)}$$

причём $\varphi_1(y)_0 = \varphi_2(x_0)$.

Функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(x)$ предположим имеющими непрерывные производные 1-го порядка.

Мы докажем, что уравнение (V.1) *имеет в прямоугольнике*

$$x_0 \leqslant x \leqslant a,$$
$$y_0 \leqslant y \leqslant b$$

единственное решение, удовлетворяющее условиям (V.2).

Положим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=v, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=w. \tag{V.3}$$

Уравнение (V.1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial x}=F(x,y)-a(x,y)\,v-b(x,y)\,w-c(x,y)\,u. \tag{V.4}$$

Отсюда сразу следует, что

$$\left.\begin{aligned} v(x,y)&=v(x,y_0)+\int_{y_0}^{y}[F(x,\ y)-a(x,\ y)\,v-\\ &\qquad -b(x,\ y)\,w-c(x,\ y)\,u]\,dy,\\ w(x,y)&=w(x_0,y)+\int_{x_0}^{x}[F(x,\ y)-a(x,\ y)\,v-\\ &\qquad -b(x,\ y)\,w-c(x,\ y)\,u]\,dx,\\ u(x,y)&=u(x,y_0)+\int_{y_0}^{y}w(x,\ y)\,dy \end{aligned}\right\} \tag{V.5}$$

и, в силу (V.2),

$$v(x,\ y_0)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=y_0}=\varphi_2'(x),$$

$$w(x_0,\ y)=\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=x_0}=\varphi_1'(y).$$

Из (V.4) и (V.2) следует:

$$\left.\begin{aligned} v(x,\ y)&=\varphi_2'(x)+\\ &\quad+\int_{y_0}^{y}[F(x,y)-a(x,y)\,v-b(x,y)\,w-c(x,y)\,u]\,dy,\\ w(x,\ y)&=\varphi_1'(y)+\\ &\quad+\int_{x_0}^{x}[F(x,y)-a(x,y)\,v-b(x,y)\,w-c(x,y)\,u]\,dx,\\ u(x,\ y)&=\varphi_2(x)+\int_{y_0}^{y}w\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{V.6}$$

Обратно, всякое решение системы (V.6) удовлетворяет, очевидно, системе уравнений (V.4) и второму из уравнений (V.3). Кроме того,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi_2'(x)+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial w}{\partial x}\,dx=$$

$$=\varphi_2'(x)+\int_{y_0}^{y}[F(x,y)-a(x,y)v-b(x,y)w-c(x,y)u]\,du=v.$$

Следовательно, удовлетворяется и первое уравнение (V.3). Далее из (V.6) следует

$$u|_{y=y_0}=\varphi_2(x),$$

$$u\Big|_{x=x_0}=\varphi_2(x_0)+\int_{y_0}^{y}w\Big|_{x=x}dy=\varphi_2(x_0)+\int_{y_0}^{y}\varphi_1'(y)\,dy=$$

$$=\varphi_2(x_0)+\varphi_1(y)-\varphi_1(y_0)=\varphi_1(y).$$

Итак, всякое решение системы (V.6) есть решение поставленной задачи. Из всего сказанного выше следует, что система (V.6) эквивалентна уравнению (V.1) при условиях (V.2). Решение системы (V.6) мы будем искать методом последовательных приближений. Пусть

$$v_0=\varphi_2'(x),\qquad w_0=\varphi_1'(y),\qquad u_0=\varphi_2(x).$$

Мы положим, далее,

$$\left.\begin{aligned}
&v_n=\varphi_2'(x)+\\
&+\int_{y_0}^{y}[F(x,y)-a(x,y)v_{n-1}-b(x,y)w_{n-1}-c(x,y)u_{n-1}]\,dy,\\
&w_n=\varphi_1'(y)+\\
&+\int_{x_0}^{x}[F(x,y)-a(x,y)v_{n-1}-b(x,y)w_{n-1}-c(x,y)u_{n-1}]\,dx,\\
&u_n=\varphi_2(x)+\int_{y_0}^{y}w_{n-1}\,dy.
\end{aligned}\right\}\qquad (V.7)$$

Докажем сходимость последовательностей u_n, v_n и w_n. Для этого мы предположим, что все функции $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_1'(y)$, $\varphi_2'(x)$,

$F(x, y)$, $a(x, y)$, $b(x, y)$ и $c(x, y)$ ограничены в прямоугольнике (V.2). Мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= -\int_{y_0}^{y} [a(x, y)(v_n-v_{n-1})+ \\ &\qquad + b(x, y)(w_n-w_{n-1})+c(x, y)(u_n-u_{n-1})]\,dy, \\ w_{n+1}-w_n &= -\int_{x_0}^{x} [a(x, y)(v_n-v_{n-1})+ \\ &\qquad + b(x, y)(w_n-w_{n-1})+c(x, y)(u_n-u_{n-1})]\,dx, \\ u_{n+1}-u_n &= \int_{y_0}^{y} (w_n-w_{n-1})\,dy. \end{aligned}\right\} \quad (V.8)$$

Пусть $|u_n-u_{n-1}|$, $|v_n-v_{n-1}|$, $|w_n-w_{n-1}|$ удовлетворяют неравенствам:

$$\left.\begin{aligned} |v_n-v_{n-1}| &\leqslant K^{n-1}A\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ |w_n-w_{n-1}| &\leqslant K^{n-1}A\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ |u_n-u_{n-1}| &\leqslant K^{n-1}A\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \end{aligned}\right\} \quad (V.9)$$

где $|a(x, y)|+|b(x, y)|+|c(x, y)|<K$ и A — некоторое постоянное число.

При $n=1$ справедливость (V.9) очевидна, если выбрать постоянную A достаточно большой. Покажем, что эти неравенства останутся справедливыми при замене n на $n+1$. Из (V.8) имеем, например:

$$\begin{aligned} |v_{n+1}-v_n| &\leqslant \int_{y_0}^{y} (|a|+|b|+|c|)K^{n-1}A\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}\,dy \leqslant \\ &\leqslant AK^n \int_{y_0}^{y} \frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}\,dy = \\ &= AK^n\left[\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}-\frac{(x-x_0)^n}{n!}\right] \leqslant AK^n\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Так же оцениваются и остальные разности (V.9).

Из оценки (V.9) следует абсолютная и равномерная сходимость рядов:

$$u_0+\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n-1}), \quad v_0+\sum_{n=1}^{\infty}(v_n-v_{n-1}), \quad w_0+\sum_{n=1}^{\infty}(w_n-w_{n-1}),$$

члены которых по абсолютной величине меньше членов равномерно сходящегося ряда

$$A + A\sum_{n=1}^{\infty} K^{n-1}\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!},$$

представляющего, как известно, функцию

$$A + Ae^{K(x+y-x_0-y_0)}.$$

Следовательно, u_n, v_n и w_n в прямоугольнике $\{x_0 \leqslant x \leqslant a, y_0 \leqslant y \leqslant b\}$ равномерно стремятся к определённым пределам. Переходя к пределу в формулах (V.7), видим, что предельные функции u, v и w удовлетворяют (V.6), и наша задача решена. Заметим, что мы с тем же успехом могли рассмотреть и случай, когда $x < x_0$, $y < y_0$. Все рассуждения от этого не изменились бы.

Нетрудно установить единственность решения рассматриваемой задачи. Для этого достаточно проверить, что в том случае, когда $F \equiv 0$, $\varphi_1(y) \equiv \varphi_2(x) \equiv 0$, система (V.6) не имеет других ограниченных решений, кроме $u \equiv 0$, $v \equiv 0$, $w \equiv 0$. Допустим, что существует какое-то решение, удовлетворяющее условиям $|u| < A$, $|v| < A$, $|w| < A$. Функции u, v, w удовлетворяют неравенствам:

$$\left.\begin{aligned} |u| &\leqslant K^{n-1}A\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ |v| &\leqslant K^{n-1}A\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ |w| &\leqslant K^{n-1}A\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V.9')}$$

Эти неравенства получаются тем же способом, каким были получены неравенства (V.9), то-есть последовательными оценками.

Отсюда непосредственно вытекает единственность решения поставленной задачи, так как единственной системой функций, удовлетворяющей неравенствам (V.9′) при любом n, является $u = v = w = 0$.

§ 2. Сопряжённые дифференциальные операторы.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор 2-го порядка

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu, \qquad \text{(V.10)}$$

где A_{ij}, B_i и C являются дважды дифференцируемыми функциями $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Не уменьшая общности, можно считать $A_{ij} = A_{ji}$.

Для этого достаточно обозначить через A_{ij} половину коэффициента при производной $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}$. Назовём оператор

$$Mv \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 (A_{ij} v)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (B_i v)}{\partial x_i} + Cv \qquad (V.11)$$

сопряжённым с оператором Lu.

Легко установить непосредственным вычислением, что понятие сопряжённости обладает свойством взаимности: сопряжённым оператором для сопряжённого оператора M будет первоначальный оператор L.

Если оператор L совпадает с ему сопряжённым M, то такой оператор называют *самосопряжённым.*

Имеет место формула

$$vLu - uMv = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[vA_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial (A_{ij} v)}{\partial x_j} \right] + B_i uv \right\}. \qquad (V.12)$$

Иными словами, выражение $vLu - uMv$ представляет собой сумму частных производных по x_i от некоторых выражений P_i, т. е.

$$vLu - uMv = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial x_i},$$

где

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} \left(vA_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial (A_{ij} v)}{\partial x_j} \right) + B_i uv. \qquad (V.13)$$

Формула (V.12) проверяется с помощью непосредственного дифференцирования. Мы имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial x_i} = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} vA_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} vB_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cuv \right] -$$
$$- \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u \frac{\partial^2 (A_{ij} v)}{\partial x_j \partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} u \frac{\partial (B_i v)}{\partial x_i} + Cuv \right] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial (A_{ij} v)}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (A_{ij} v)}{\partial x_j} \right).$$

Последняя сумма обращается в нуль, и мы получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial x_i} = vLu - uMv, \qquad (V.14)$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь некоторый n-мерный объём Ω, ограниченный кусочно-гладкой поверхностью S[1]).

(В случае, если $n=2$ или 1, слова «объём» и «поверхность» заменяются соответственно словами «область» и «линия»; «отрезок» и «концы отрезка».)

На основании формулы, аналогичной формуле (I.2), будем иметь

$$\int\int_{\Omega} \dots \int (vLu - uMv)\, dx_1 \dots dx_n =$$

$$= -\int_S \dots \int \sum_{i=1}^{n} P_i \cos(nx_i)\, dS \qquad \text{(V.15)}$$

где $\cos(nx_1)$, $\cos(nx_2)$, ... — направляющие косинусы внутренней нормали к S.

Формула (V.15) *носит название формулы Грина.*

Рассмотрим два примера.

Пример 1. *Формула Грина для оператора Лапласа.*

Пусть $Lu = \Delta u$. При этом

$$Mv = \Delta v, \quad P_x = v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}, \quad P_y = v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$P_z = v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Формула Грина примет вид

$$\iiint_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)\, dx\, dy\, dz = -\iint_S \left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos nx + \right.$$

$$\left. + \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos ny + \left(v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos nz\right] dS =$$

$$= \iint_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS, \qquad \text{(V.16)}$$

где, как обычно, через $\frac{\partial v}{\partial n}$ обозначена нормальная производная функции v. Она равна проекции вектора $\operatorname{grad} v$ с составляющими $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$ на направление внутренней нормали. Формулу (V.16) также называют формулой Грина для оператора Лапласа.

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим уравнение (V.1).

[1]) Предполагаем, что все условия непрерывности функций и их производных, о которых говорилось при установлении формулы (I.2), выполнены.

Для оператора Lu, стоящего в левой части этого уравнения, сопряжённый оператор Mv и функции P_1 и P_2 будут иметь вид:

$$Mv \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial(av)}{\partial x} - \frac{\partial(bv)}{\partial y} + cv,$$

$$P_1 = \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + auv,$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv.$$

При этом формула Грина даёт (нормаль внутренняя):

$$\iint\limits_{\Omega}(vLu - uMv)\,dx\,dy = -\int\limits_{S}\left\{\left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + auv\right]\cos(nx) + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv\right]\cos(ny)\right\}dS. \quad \text{(V.17)}$$

§ 3. Метод Римана.

Риманом был предложен важный метод нахождения различных решений уравнения (V.1), основанный на использовании формулы Грина (V.17). Займёмся решением задачи Коши для уравнения (V.1). Пусть нам даны значения u и $\frac{\partial u}{\partial y}$ на кривой:

$$y = \mu(x),$$

причём предполагается, что

$$\mu'(x) < 0, \quad \text{(V.18)}$$

$$u\big|_{y=\mu(x)} = \varphi_0(x), \quad \text{(V.19)}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\mu(x)} = \varphi_1(x) \quad \text{(V.20)}$$

(производная в формуле (V.20) берётся частная, а не вдоль кривой $y = \mu(x)$).

Дифференцируя формулу (V.19), имеем:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=\mu(x)} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\mu(x)}\mu'(x) = \varphi_0'(x),$$

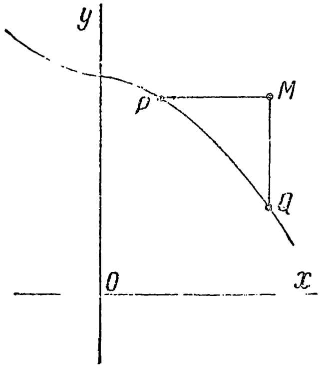
откуда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=\mu(x)} = \varphi_0'(x) - \varphi_1(x)\,\mu'(x). \quad \text{(V.21)}$$

Преобразуем формулу (V.17) к несколько более удобному виду. Считая, что обход области совершается против часовой стрелки, так что обходимая площадь остаётся слева, будем иметь:

$$dx = \cos(ny)\,dS,$$
$$dy = -\cos(nx)\,dS,$$

если считать dS всегда положительным.



Черт. 9.

Пользуясь этими соотношениями, мы получим из формулы (V.17):

$$\iint\limits_{\Omega} (vLu - uMv)\,dx\,dy = \int\limits_{S}\left[\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) - buv\right]dx - \left[\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) - auv\right]dy. \quad \text{(V.22)}$$

Проведём через точку M (черт. 9) с координатами (x_0, y_0) две прямые, параллельные координатным осям до пересечения в точках P и Q с кривой $y = \mu(x)$.

Применяя формулу (V.18) к треугольнику MPQ, имеем:

$$\iint\limits_{\Omega} (vLu - uMv)\,dx\,dy = \int\limits_{P}^{Q}\left\{\left[\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) - buv\right]dx - \left[\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) - auv\right]dy\right\} + \int\limits_{Q}^{M}\left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + auv\right]dy + \int\limits_{P}^{M}\left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv\right]dx. \quad \text{(V.23)}$$

Преобразуем два последних интеграла:

$$\int\limits_{Q}^{M}\left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + auv\right]dy = \frac{1}{2}uv\Big|_{Q}^{M} + \int\limits_{Q}^{M}\left(-u\frac{\partial v}{\partial y} + auv\right)dy = \frac{1}{2}uv\Big|_{Q}^{M} + \int\limits_{Q}^{M} u\left(-\frac{\partial v}{\partial y} + av\right)dy, \quad \text{(V.24)}$$

$$\int\limits_{P}^{M}\left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv\right]dx = \frac{1}{2}uv\Big|_{P}^{M} + \int\limits_{P}^{M} u\left(-\frac{\partial v}{\partial x} + bv\right)dx. \quad \text{(V.25)}$$

Эти формулы позволяют легко решить нашу задачу. Пусть $v(x, y; x_0, y_0)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условиям:

$$Mv = 0,$$

$$v\big|_{x=x_0} = e^{\int\limits_{y_0}^{y} a(x_0, y)\,dy}, \quad v\big|_{y=y_0} = e^{\int\limits_{x_0}^{x} b(x, y_0)\,dx}.$$

При этом

$$v(x_0, y_0; x_0, y_0) = 1,$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{x=x_0} = a(x_0, y)\, e^{\int\limits_{y_0}^{y} a(x_0, y)\,dy} = a(x_0, y)\, v\Big|_{x=x_0},$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{y=y_0} = b(x, y_0)\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} b(x, y_0)\,dx} = b(x, y_0)\, v\Big|_{y=y_0}.$$

Существование такой функции нами уже установлено в прошлом параграфе в результате решения первой краевой задачи. Функция v удовлетворяющая этим условиям, называется функцией Римана.

Так как на прямой PM имеем $y = y_0$, а на прямой QM имеем $x = x_0$, то последние члены в формулах (V.24) и (V.25) обращаются в нуль, и мы получим:

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{Q}^{M} \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + auv\right] dy = \frac{1}{2}\, uv\Big|_{Q}^{M}, \\ &\int\limits_{P}^{M} \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv\right] dx = \frac{1}{2}\, uv\Big|_{P}^{M}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V.26)}$$

Вернёмся теперь к формуле (V.23), которая после подстановки в неё (V.26) дает:

$$\iint\limits_{\Omega} vF(x, y)\,dx\,dy = u\Big|_{M} - \frac{1}{2}(uv)\Big|_{P} - \frac{1}{2}(uv)\Big|_{Q} + \Phi, \qquad \text{(V.27)}$$

где через Φ обозначено первое слагаемое правой части формулы (V.23), которое всё целиком выражается через v и известные функции, ибо на этой кривой в силу (V.19), (V.20), (V.21) и (V.22) известны u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

При этом (V.27) даёт так называемую *формулу Римана*

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(uv)\Big|_{P} + \frac{1}{2}(uv)\Big|_{Q} - \Phi + \iint\limits_{\Omega} vF(x, y)\,dx\,dy. \qquad \text{(V.28)}$$

Как мы видим, формула (V.28) позволяет в явном виде написать решение интересующей нас задачи, так как x_0, y_0 — произвольная точка.

Из самого способа получения формулы Римана следует, что поставленная задача может иметь лишь единственное решение, так как мы получили для неизвестной функции u явное и однозначно определённое выражение, не делая никаких предположений о ней, кроме её существования. Для того чтобы закончить исследование, нам остаётся показать, что решение рассматриваемой задачи Коши действительно существует.

Заметим, что достаточно установить существование решения уравнения (V.1) при условиях, когда на кривой $y = \mu(x)$ функция u вместе с производными 1-го порядка обращается в нуль. В самом деле, мы могли бы вместо функции u ввести новую неизвестную функцию

$$w = u - \varphi_0(x) - [y - \mu(x)]\, \varphi_1(x).$$

Функция w будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\, dy} + a(x, y) \frac{\partial w}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial w}{\partial y} + c(x, y)\, w = F_1(x, y),$$

где

$$\begin{aligned} -F_1(x, y) = F(x, y)\varphi_1'(x) - a(x, y)\{\varphi_0'(x) + {} \\ + [y - \mu(x)]\varphi_1'(x) - \mu'(x)\varphi_1(x)\} - b(x, y)\varphi_1(x) - c(x, y)\{\varphi_0(x) + {} \\ + [y - \mu(x)]\varphi_1(x)\}, \end{aligned} \qquad \text{(V.29)}$$

и однородным условиям

$$w \Big|_{y=\mu(x)} = \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=\mu(x)} = 0.$$

Уравнение (V.29) имеет тот же вид, что и (V.1), но отличается от него свободным членом. Если мы докажем существование решения новой задачи, поставленной для функции w, то из этого будет следовать существование решения первоначальной задачи. В том случае, когда функции φ_0 и φ_1 равны нулю, формула Римана дает:

$$u(x_0, y_0) = \iint_{\Omega} vF(x, y)\, dx\, dy. \qquad \text{(V.30)}$$

Нам достаточно показать, что функция $u(x_0, y_0)$, определяемая формулой (V.30), удовлетворяет уравнению (V.1) и обращается в нуль вместе с производными 1-го порядка при $y_0 = \mu(x_0)$. Проверим сначала последнее. При $y_0 = \mu(x_0)$ область Ω исчезает и, следовательно, $u|_{y_0 = \mu(x_0)} = 0$, Далее, на основании указанного выше правила дифференцирования интегралов по переменной области имеем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_0} &= \int\limits_{Q}^{M} vF(x_0, y)\,dy + \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_0} F(x, y)\,dx\,dy,\\ \frac{\partial u}{\partial y_0} &= \int\limits_{P}^{M} vF(x, y_0)\,dx + \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y_0} F(x, y)\,dx\,dy.\end{aligned}\right\} \tag{V.31}$$

В обеих формулах интегралы, стоящие в правых частях, обращаются в нуль при $y_0 = \mu(x_0)$. Остаётся убедиться в том, что $u(x_0, y_0)$ удовлетворяет уравнению (V.1). Мы проверим это несколько позднее.

§ 4. Функция Римана для сопряжённого уравнения.

В § 1 мы нашли решение первой краевой задачи при помощи последовательных приближений. Метод Римана позволяет найти её решение в более удобном виде. Пусть, как и в первом параграфе настоящей лекции, требуется найти решение u уравнения (V.1) при условиях (V.2). Проведём на плоскости (x, y) прямые $x = x_0$ и $y = y_0$, которые обозначим соответственно SP и SQ, где точка S имеет координаты (x_0, y_0). Из точки M с координатами (x_1, y_1) проведём прямые MP и MQ, параллельные координатным осям. Применим формулу (V.22) к прямоугольнику $MPSQ$, взяв в качестве u неизвестное пока решение, а в качестве v — функцию Римана $v(x, y; x_1, y_1)$. Мы будем иметь

$$\iint\limits_{\Omega} (vLu - uMv)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega} vF\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{P}^{M} \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv\right] dx + \int\limits_{Q}^{M} \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + auv\right] dy -$$

$$- \int\limits_{S}^{Q} \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv\right] dx - \int\limits_{S}^{P} \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + auv\right] dy.$$

Преобразуя, как прежде, интегралы по отрезкам PM и QM и замечая, что на отрезках SQ и SP выражения, стоящие под знаком интеграла, составлены из известных функций, получим:

$$\iint_\Omega vF(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= u\Big|_M - \frac{1}{2}uv\Big|_P - \frac{1}{2}uv\Big|_Q - \int_S^Q \left[\frac{1}{2}\left(v\varphi_2' - \frac{\partial v}{\partial x}\varphi_2\right) + bv\varphi_2\right]dx -$$

$$- \int_S^P \left[\frac{1}{2}\left(v\varphi_1' - \frac{\partial v}{\partial x}\varphi_1\right) + av\varphi_1\right]dy. \qquad \text{(V.32)}$$

Удобно избавиться в этой формуле от производных функции v. С этой целью проинтегрируем по частям оба интеграла в правой части формулы (V.32). Оставляя $u\big|_M$ в левой части уравнения и перенося в правую часть остальные члены, получим:

$$u\Big|_M = \frac{1}{2}uv\Big|_P + \frac{1}{2}uv\Big|_Q - \frac{1}{2}uv\Big|_S^Q - \frac{1}{2}uv\Big|_S^P +$$

$$+ \int_S^Q v(\varphi_2' + b\varphi_2)\,dx + \int_S^P v(\varphi_1' + a\varphi_1)\,dy + \iint_\Omega vF(x, y)\,dx\,dy.$$

Итак,

$$u\big|_M = uv\big|_S + \int_S^Q v(\varphi_2' + b\varphi_2)\,dx + \int_S^P v(\varphi_1' + a\varphi_1)\,dy +$$

$$+ \iint_\Omega vF(x, y)\,dx\,dy. \qquad \text{(V 33)}$$

Из формулы (V.33) вытекает важное следствие. Пусть функция u является функцией Римана для сопряжённого уравнения

$$Mv = 0,$$

то-есть представляет собой функцию, удовлетворяющую однородному уравнению Lu и условиям

$$u\big|_{y=y_0} = e^{\int_{x_0}^{x} b(x, y_0)\,dx}, \qquad u\big|_{x=x_0} = e^{\int_{y_0}^{y} a(x_0, y)\,dy}.$$

При этом предположении все слагаемые правой части (V.33) обратятся в нуль, и мы получим, пользуясь равенством $u|_S = 1$,

$$u\big|_M = v\big|_S, \quad \text{или} \quad u(x_1, y_1; x_0, y_0) = v(x_0, y_0; x_1, y_1).$$

Это соотношение называется теоремой о симметрии функции Римана. Словесно оно формулируется следующим образом: если в функции Римана рассматривать переменные x_0, y_0 как текущие координаты, а x_1, y_1 как координаты вершины, то получится функция Римана для сопряжённого уравнения.

Следствие. *Функция Римана* $v(x, y; x_0, y_0)$, *определённая выше, удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_0 \partial y_0} + a(x_0, y_0)\frac{\partial v}{\partial x_0} + b(x_0, y_0)\frac{\partial v}{\partial y_0} + c(x_0, y_0)v = 0. \quad (V.34)$$

Пользуясь этим фактом, можно легко проверить, что функция $u(x_0, y_0)$, которая определяется формулой (V.30), действительно удовлетворяет уравнению (V.1) и, следовательно, является решением задачи Коши. Дифференцируя первую из формул (V.31) по y_0, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial y_0} = v\Big|_{(x_0, y_0)} F(x_0, y_0) + \int_Q^M \frac{\partial v}{\partial y_0} F(x_0, y)\,dy +$$
$$+ \int_P^M \frac{\partial v}{\partial x_0} F(x, y_0)\,dx + \iint_\Omega \frac{\partial^2 v}{\partial x_0 \partial y_0} F(x, y)\,dx\,dy.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial y_0} + a(x_0, y_0)\frac{\partial u}{\partial x_0} + b(x_0, y_0)\frac{\partial u}{\partial y_0} + c(x_0, y_0) =$$
$$= F(x_0, y_0) + \int_Q^M \left(\frac{\partial v}{\partial x_0} + av\right) F(x_0, y)\,dy + \int_P^M \left(\frac{\partial v}{\partial x_0} + bv\right) F(x, y_0)\,dx +$$
$$+ \iint_\Omega \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_0 \partial y_0} + a(x_0, y_0)\frac{\partial v}{\partial x_0} + b(x_0, y_0)\frac{\partial v}{\partial y_0} + c(x_0, y_0)v\right] F(x, y)\,dx\,dy.$$

Из последней формулы непосредственно получаем

$$Lu = F,$$

что и требовалось доказать.

§ 5. Некоторые качественные следствия формулы Римана.

Из формулы Римана вытекают некоторые следствия, имеющие общий интерес. Остановимся на них несколько подробнее.

Будем изучать поведение решения задачи Коши для уравнения (V.1) в зависимости от изменения начальных условий. Легко видеть, что значение этого решения в некоторой точке (x_0, y_0) вовсе не зависит от данных Коши вне криволинейного треугольника MPQ, образованного двумя характеристиками, проведёнными через эту точку, и кривой, несущей начальные данные. Если мы будем менять данные вне этого треугольника, то решение будет меняться лишь вне этого треугольника. Таким образом, каждая характеристика будет отделять область, где решение осталось неизменным, от той области, где оно изменилось. Мы приходим к следующему выводу: *к данному решению задачи, зафиксированному внутри треугольника MPQ, можно присоединять вдоль характеристики, вообще говоря, различные решения, являющиеся его продолжением.*

Таким образом, характеристики суть линии, вдоль которых можно разрезать область существования решения, если мы хотим в некоторых частях этой области заменить одно решение другим так, чтобы при этом снова получить решение уравнения во всей области. Это важное свойство характеристик тесно связано с тем, что при произвольных начальных данных, заданных на характеристиках, задача Коши, вообще говоря, неразрешима. Для всякой другой линии, зная решение по одну сторону линии, мы могли бы найти значения решения и его производных на этой линии и решить задачу Коши по другую сторону линии. Таким образом, за всякую нехарактеристическую линию решение уравнения продолжается однозначно.

ЛЕКЦИЯ VI.

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

В курсе математического анализа изучают главным образом непрерывные функции одного или многих независимых переменных. Однако такие функции оказываются недостаточными в вопросах математической физики, где существенное значение приобретают разрывные и неограниченные функции. Наиболее важным понятием, применение которого для разрывных функций необходимо в вопросах математической физики, является понятие интеграла. Поэтому мы специально остановимся на теории интегрирования разрывных и неограниченных функций. Мы построим для таких функций теорию интеграла Лебега, следуя в основном идеям русской математической школы, и докажем для этого интеграла все основные теоремы, излагаемые обычно в курсах интегрального исчисления для интегралов от непрерывных функций.

Не следует думать, что целью нашего изложения является просто желание достичь наибольшей общности в теории интегрирования разрывных функций. Обобщение понятия интеграла придаёт теории интегрирования внутреннюю законченность и позволяет благодаря этому получить целый ряд важных теорем, не имеющих места для обычных интегралов от непрерывных функций.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими тремя важными результатами.

1. Признак допустимости предельного перехода под знаком интеграла.
2. Теорема о возможности перемены порядка интегрирования в кратных интегралах (теорема Лебега—Фубини).
3. Признак сходимости в среднем последовательности функций.

Интегрирование разрывных и неограниченных функций мы будем рассматривать, пользуясь главным образом идеей, которую можно назвать идеей исключения особенностей.

Если функция f многих переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, заданная в некоторой области Ω, разрывна в этой области, но после исключения из Ω некоторой частичной сколь угодно малой области σ становится непрерывной в оставшейся области Ω', то естественный путь к нахождению интеграла от этой функции состоит в том, чтобы рассмотреть сначала интеграл по Ω', а затем перейти к пределу, устремляя Ω' к Ω. Этот способ всегда используют в элементарной теории несобственных интегралов.

Теорию интегралов Лебега мы будем излагать, пользуясь тем же приёмом и лишь несколько обобщив его. Основное значение для нас будет иметь понятие функции, непрерывной на замкнутом множестве. Свойства замкнутых множеств, то-есть множеств, содержащих все свои предельные точки, мы изучим несколько позднее. Сейчас отметим, что функция, непрерывная на замкнутом множестве точек, обладает рядом весьма важных свойств, которые позволяют, в частности, построить интеграл от неё.

Наряду с замкнутыми множествами мы будем изучать открытые множества, то-есть такие множества, которые не содержат ни одной точки своей границы. Вначале определим понятие интеграла для функций, непрерывных на открытом множестве. Пользуясь этим понятием, мы разовьём далее теорию интегрирования непрерывных функций на замкнутых множествах и исследуем поведение интеграла при изменении области интегрирования.

В общем случае интеграл Лебега от разрывной функции строится следующим способом. Из области Ω, где задана функция f, исключается множество σ так, чтобы осталось замкнутое множество Ω', на котором функция непрерывна. Далее вычисляется интеграл от f по замкнутому множеству Ω'. Переходя к пределу, когда Ω' стремится к Ω, получаем интеграл от функции f по множеству Ω.

В построенной таким образом теории интегрирования мы, естественно, стремимся сохранить ряд основных свойств обычного интеграла, как, например, возможность почленного интегрирования суммы нескольких функций. Это заставляет уже на первых шагах несколько ограничить класс функций, подлежащих нашему рассмотрению. Таким путём мы приходим к понятиям измеримой и суммируемой функции. Именно для суммируемых функций и ведётся дальнейшее исследование; для них остаются справедливыми все важнейшие свойства обычного интеграла.

В настоящей лекции мы затронем также упомянутые выше вопросы теории суммируемых функций.

§ 1. Замкнутые и открытые множества точек.

Прежде чем приступить к изложению теории интеграла Лебега, мы должны остановиться на некоторых свойствах точечных множеств в n-мерном пространстве.

Рассмотрим n-мерное пространство с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Открытым множеством в этом пространстве мы будем называть такое множество точек M, каждая точка которого является внутренней для этого множества, то-есть может быть окружена шаром с центром в* этой *точке, целиком принадлежащим множеству M.*

Открытое множество может быть связным, то-есть состоять из одного куска, но может быть и несвязным, будучи образованным отдельными кусками в конечном или бесконечном числе. Связное открытое множество принято называть областью.

Пример 1. Множество всех внутренних точек некоторого прямоугольного параллелепипеда, определённое неравенствами

$$0 < x_i < a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

есть открытое множество. (Знак $<$ нельзя заменить на $\leqslant$. Параллелепипед с границей не является открытым множеством.)

Пример 2. Множество всех внутренних точек некоторого шара, определённых неравенством $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < R^2$, является открытым.

Если исключить из этого множества начало координат, рассматривая только точки, для которых

$$0 < \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < R^2,$$

то мы опять получим открытое множество.

Будем называть суммой нескольких множеств, или их объединением, множество всех точек, принадлежащих хотя бы одному из них. Сумму E множеств E_1 и E_2 будем обозначать $E_1 + E_2$ и записывать $E = E_1 + E_2$.

Сумма конечного или бесконечного числа открытых множеств есть снова открытое множество.

В самом деле, каждая точка такой суммы является внутренней по крайней мере для одного из открытых множеств и, следовательно, будет внутренней точкой для суммы.

Кроме открытых множеств, большую роль играют ещё *замкнутые множества, т. е. такие множества, которые содержат все свои предельные точки.*

Приведём примеры замкнутых множеств.

Пример 3. Множество всех точек шара

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant R^2$$

есть замкнутое множество (знак $\leqslant$ здесь нельзя заменить знаком $<$).

Пример 4. Множество всех точек некоторого параллелепипеда $0 \leqslant x_i \leqslant a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ есть замкнутое множество.

Пример 5. Множество, состоящее из одной точки $x_i = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, является замкнутым. В самом деле, это множество вообще не имеет предельных точек.

Сумма конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество. (Для бесконечного числа множеств это утверждение уже не имеет места.) Доказательство не представляет большого труда, и мы оставляем его читателю.

Условимся идеальное множество, не содержащее ни одной точки, называть пустым множеством. Это соглашение позволит упростить формулировки ряда дальнейших теорем. Пустое множество будем считать одновременно и открытым и замкнутым.

Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ — некоторые множества в конечном или бесконечном числе. Будем называть их пересечением множество E всех точек, каждая из которых принадлежит всем этим множествам. Иногда это пересечение будет пустым множеством. Будем обозначать пересечение E множеств $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ следующим образом:

$$E = E_1E_2E_3 \ldots E_k \ldots \text{ или } E = \prod_k E_k.$$

Пересечение F конечного или бесконечного числа замкнутых множеств $F_1, F_2, \ldots, F_k, \ldots$ есть замкнутое множество. (В частности, оно может быть пустым.) В самом деле, предельная точка множества F является предельной точкой каждого из множеств $F_1, F_2, \ldots, F_k, \ldots$ и, следовательно, принадлежит им всем и должна содержаться в их пересечении F.

Если все точки некоторого множества E_1 принадлежат множеству E_2, то мы будем говорить, что E_1 содержится в E_2 или заключено в E_2. Это свойство мы будем выражать символически следующим образом:

$$E_2 \supseteq E_1 \text{ или } E_1 \subseteq E_2.$$

Замечание. *Ограниченное бесконечное множество в n-мерном пространстве всегда имеет хотя бы одну предельную точку.*

Справедливость этого замечания устанавливается так же, как и в случае одного независимого переменного. В самом деле, пусть координаты точки $P^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, принадлежащей множеству E, будут $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})$. Рассмотрим множество чисел $\{x_1^{(i)}\}$, представляющих собой первые координаты точек $P^{(i)}$. Это множество, будучи бесконечным и ограниченным, имеет по крайней мере одну предельную точку (в частности, если какое-либо число $x_1^{(0)}$ повторяется в нашей последовательности бесконечно много раз, то оно может быть принято за такую предельную точку).

Выберем из последовательности $P^{(i)}$ подпоследовательность $P_1^{(j)}$ такую, что для неё последовательность $x_i^{(j)}$ имеет предел. Повторяя это рассуждение, из $P_1^{(j)}$ выберем подпоследовательность $P_2^{(k)}$, у которой будут иметь предел уже две первые координаты, затем построим последовательность $P_3^{(l)}$ и т. д. После n шагов придём к последовательности $P_n^{(s)}$, у которой все координаты сходятся и которая, следовательно, имеет предельную точку, что и требовалось доказать.

Теорема 1. *Если последовательность ограниченных замкнутых множеств является суживающейся, т. е.*

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_k \supseteq \ldots$$

и ни одно из множеств F_k не пусто, то и их пересечение F не пусто.

В самом деле, рассмотрим последовательность точек $P_1, P_2, \ldots P_k, \ldots$, причём $P_k \subseteq F_k$. Множество точек этой последовательности, будучи ограниченным, должно иметь по крайней мере одну предельную точку. Эта точка, являясь предельной для каждого F_k, принадлежит всем F_k и, следовательно, войдёт в их пересечение, которое уже поэтому не может быть пустым, что и требовалось доказать.

Полезно заметить, что *пересечение конечного числа открытых множеств*

$$\Omega = \Omega_1\Omega_2 \ldots \Omega_k$$

представляет собой открытое множество. В самом деле, любая точка Ω есть внутренняя точка для каждого из множеств $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ и в каждом из них является центром некоторого внутреннего шара. Наименьший из этих шаров будет внутренним шаром в Ω.

Пусть E_1 и E_2 — два множества. Удалим из E_1 все точки, принадлежащие пересечению E_1E_2. Оставшееся множество мы будем называть разностью и обозначать $E = E_1 - E_2$. С помощью операции образования разности мы можем построить ещё несколько примеров замкнутых и открытых множеств.

Пусть Ω — открытое множество, а F — замкнутое множество. Тогда

$$\Omega_0 = \Omega - F$$

есть открытое множество.

В самом деле, если бы Ω_0 принадлежала точка, не окружённая внутренним по отношению к Ω_0 шаром, то в любой её окрестности имелись бы точки, выброшенные из Ω, т. е. принадлежащие F. Будучи, таким образом, предельной точкой для множества F, сама эта точка должна была бы принадлежать F и, следовательно, не могла бы принадлежать $\Omega_0 = \Omega - F$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Далее, $F_0 = F - \Omega$ есть замкнутое множество.

Точка P, предельная для множества F_0, являясь точкой из F, могла бы быть исключена из последнего только в том случае, если бы она принадлежала Ω. Но точки Ω не могут быть предельными для F_0, так как они принадлежат Ω вместе с некоторыми окрестностями, которые в силу этого не могут содержать точек из F_0. Значит, ни одна точка P, предельная для F_0, не может быть выброшена из F при вычитании Ω и, следовательно, F_0 содержит все свои предельные точки. Таким образом, F_0 замкнуто.

Замыкание $\overline{E}$ любого множества E, то-есть множество, получаемое присоединением к E всех его предельных точек, представляет собой замкнутое множество.

В самом деле, пусть точка P_0 является предельной для некоторой последовательности $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$ точек из $\bar{E}$. Покажем, что точка P_0 является предельной точкой не только для $\bar{E}$, но и для E и, следовательно, входит в $\bar{E}$. Отсюда будет вытекать, что множество $\bar{E}$ содержит все свои предельные точки и является замкнутым. Внутри каждого шара σ_k, описанного вокруг P_k радиусом $\frac{1}{2^k}$, найдётся хотя бы одна точка Q_k, принадлежащая E.

Последовательность Q_k сходится, очевидно, снова к P_0 и, следовательно, P_0 есть предельная точка множества E, что и требовалось доказать.

Граница C открытого множества Ω, т. е. множество предельных точек этого открытого множества, не являющихся внутренними точками, представляет собой замкнутое множество.

В самом деле, по определению множества C имеем

$$C = \bar{\Omega} - \Omega,$$

где $\bar{\Omega}$ есть замыкание множества Ω. По доказанному выше множество C замкнуто.

При помощи рассмотренных операций над множествами из замкнутых и открытых множеств простого строения могут быть получены замкнутые множества довольно сложной структуры, как показывают следующие два примера.

Пример 6. Множество F_* всех точек замкнутого отрезка $[0, 1]$, координата которых может быть записана по десятичной системе без применения цифры 5, есть замкнутое множество. При этом допускается запись числа при помощи бесконечного ряда девяток, например: $0{,}5 = 0{,}4999\ldots$ Поэтому, если десятичная дробь, выражающая координату какой-то точки, конечная и содержит только одну пятёрку в последнем разряде, то эта точка войдёт в множество F_*.

Замкнутость этого множества проще всего установить, если заметить, что оно представляет собой разность

$$[0, 1] - \Omega_*,$$

где $[0, 1]$ — замкнутый отрезок, а Ω_* — открытое множество, состоящее из всех точек, принадлежащих открытым промежуткам Ω_i, которые задаются неравенствами вида

$$0{,}5 < x < 0{,}6; \quad 0{,}15 < x < 0{,}16; \ldots;$$

$$\Omega_* = \sum \Omega_i.$$

Действительно, каждая точка, координата которой не может быть записана без помощи пятёрки, принадлежит одному из промежутков Ω_i. Все Ω_i суть открытые множества, поэтому множество Ω_* также открытое и, значит, F_* — замкнутое множество.

Множество точек E, для которого в любом открытом внутреннем множестве Ω_1 найдётся открытое подмножество Ω_2, не содержащее ни одной точки E, называется нигде не плотным. Рассмотренное выше множество F_*, как мы видим, является примером замкнутого нигде не плотного множества.

Рассмотрим в некотором открытом множестве непрерывную функцию f.

Пример 7. Множества $E(f > a)$ и $E(f < a)$, где a — любое число, являются открытыми. Докажем это, например, для $E(f > a)$.

В самом деле, если в некоторой точке P значение непрерывной функции f больше a, то и в достаточно малом шаре вокруг P имеет место неравенство $f > a$. Следовательно, множество $E(f > a)$ состоит только из внутренних точек и является открытым.

Пусть теперь функция f непрерывна в замыкании $\overline{\Omega}$ открытого множества Ω:

$$\overline{\Omega} = \Omega + C,$$

где C — граница множества Ω.

Пример 8. Множества $E(f \geqslant a)$ и $E(f \leqslant a)$ при любом a являются замкнутыми множествами. Проведём доказательство для $E(f \geqslant a)$.

Действительно, если для некоторой последовательности точек $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$, стремящейся к P_0, имеет место неравенство $f(P_k) \geqslant a$, то и $\lim\limits_{k \to \infty} f(P_k) \geqslant a$, но по непрерывности $\lim\limits_{k \to \infty} f(P_k) = f(P_0)$ и, следовательно, точка P_0 принадлежит множеству $E(f \geqslant a)$. Это и означает замкнутость множества $E(f \geqslant a)$.

В курсе математического анализа рассматриваются функции, заданные, как правило, в открытой или замкнутой области. Нам придётся в дальнейшем изучать и функции, заданные на множествах более общей природы.

Функция, заданная на некотором множестве E, называется непрерывной в точке P_0 (принадлежащей E) по множеству E, если для произвольного положительного числа ε найдётся столь малая окрестность точки P_0, что для любой точки P из множества E, принадлежащей этой окрестности, имеет место неравенство

$$|f(P_0) - f(P)| < \varepsilon.$$

Из этого определения, в частности, следует, что в изолированных точках E любая функция непрерывна. Функция, непрерывная во всех точках некоторого множества, называется непрерывной на этом множестве.

Пусть

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \ldots + \Omega_k + \ldots$$

есть сумма конечного или бесконечного числа открытых множеств. Если функция f, заданная на Ω, непрерывна на каждом множестве Ω_k, то она непрерывна и на Ω. В самом деле, любая точка Ω вместе с некоторой окрестностью входит в одно из множеств Ω_k и является в нём точкой непрерывности f.

Мы остановимся подробнее на функциях, которые заданы и непрерывны на замкнутых множествах. Докажем прежде всего две важные теоремы.

Теорема 2. (Вейерштрасса.) *Функция f, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве F, ограничена на этом множестве и принимает там свое наибольшее и наименьшее значение.*

Докажем сначала ограниченность функции f на множестве F. Допустив противное, мы получим последовательность точек, принадлежащих F, в которых значения неограниченно возрастают. Эта последовательность будет иметь по крайней мере одну предельную точку, принадлежащую множеству F, ввиду его ограниченности и замкнутости. Обозначим эту предельную точку P_0. В любой окрестности P_0 должны содержаться точки, в которых функция f принимает сколь угодно большие по абсолютной величине значения, но это противоречит непрерывности f в точке P_0, так как, по определению непрерывности, для достаточно близких к P_0 точек P, принадлежащих F, должно выполняться неравенство

$$|f(P_0) - f(P)| < \varepsilon$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Таким образом, ограниченность функции f на F доказана. Множество значений, принимаемых функцией на F, будучи ограниченным, имеет верхнюю грань M и нижнюю грань m. Мы докажем теперь, что функция принимает значения M и m в некоторых точках множества F. Согласно определению верхней грани, для любого $\varepsilon > 0$ должна существовать такая точка P_ε из F, что $M-f(P_\varepsilon)<\varepsilon$. Полагая $\varepsilon=\frac{1}{n}$, получим последовательность точек P_n такую, что $f(P_n)\to M$ при $n\to\infty$. В силу замкнутости и ограниченности F эта последовательность имеет в F по крайней мере одну предельную точку P_0. Ввиду непрерывности f, в точке P_0 имеет место равенство $f(P_0)=M$, что и требовалось доказать. Точно так же доказывается, что f принимает наименьшее значение в некоторой точке из F.

Теорема 3. (Вейерштрасса.) *Функция f, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве F, равномерно непрерывна на нём; иными словами, каково бы ни было положительное число ε, можно указать такое число $\delta=\delta(\varepsilon)$, что для любых двух точек P, Q множества F, расстояние между которыми меньше δ, имеет место неравенство*

$$|f(P)-f(Q)|<\varepsilon.$$

Если, как обычно, назвать колебанием функции на некотором замкнутом множестве разность между наибольшим и наименьшим значениями её на этом множестве, то теорему Вейерштрасса можно перефразировать так: для всякого $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta(\varepsilon)$, что колебание функции f не превосходит ε на пересечении F с любым шаром радиуса $\delta(\varepsilon)$.

Доказательство этой теоремы будем вести от противного. Предположим, что функция f не является равномерно непрерывной на F. Тогда найдётся такое положительное число ε_0, что при любом $\delta>0$ найдутся две точки P_δ и Q_δ такие, что расстояние между ними меньше δ, а разность значений f в этих точках по абсолютной величине больше ε_0. Полагая $\delta=\frac{1}{n}$ и выбирая из последовательности P_n подпоследовательность P_{n_k}, сходящуюся к некоторой точке P_0, принадлежащей F (очевидно, к этой же точке будет сходиться соответствующая подпоследовательность точек Q_{n_k}), придём к выводу, что в любой окрестности точки P_0 колебание f не меньше ε_0, а это противоречит предположению теоремы о непрерывности f на F. Теорема доказана.

Отметим одно применение доказанных теорем. Пусть F — замкнутое множество и P_0 — некоторая фиксированная точка. Расстояние $r(P, P_0)$ от переменной точки P замкнутого множества F до точки P_0 представляет непрерывную функцию точки P при заданной точке P_0. По первой теореме Вейерштрасса эта функция достигает своего наименьшего значения. Положим

$$\delta(P_0)=\min_P r(P, P_0).$$

Числом $\delta(P_0)$ называется расстояние точки P_0 до замкнутого множества F. Если P_0 не принадлежит F, то это расстояние отлично от нуля.

§ 2. Интегралы по открытым множествам от непрерывных функций.

Как уже указывалось выше, при построении общего понятия интеграла мы будем шаг за шагом расширять класс множеств, для которых оно определяется. Начнём с интегрирования по открытым множествам.

Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана, непрерывна и неотрицательна на некотором открытом множестве. (Разумеется, она может быть неограниченной и неравномерно непрерывной, как, например, функция

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}}$$

в области $0<r<1$, полученной удалением начала координат из открытого шара $0\leqslant r<1$.)

Разобьём всё пространство на кубические ячейки $F_{k_1k_2,\ldots,k_n}$ со стороной h, определённые неравенствами

$$k_ih\leqslant x_i\leqslant (k_i+1)\,h \qquad (i=1,\,2,\ldots,\,n),$$

где k_i — целые числа. Такое подразделение назовём сеткой.

Составим теперь из конечного числа кубиков сетки какое-либо множество Φ_h, лежащее целиком внутри Ω. Такое множество мы назовём внутренним сеточным множеством. Будем уменьшать h, подразделяя каждый кубик сетки на целое число более мелких кубиков, и снова строить внутренние сеточные множества. Систему внутренних сеточных множеств мы назовём исчерпывающей, если выполнены два условия:

а) последовательность Φ_h расширяется, т. е.

$$\Phi_{h_1}\subseteq\Phi_{h_2}\subseteq\ldots\subseteq\Phi_{h_k}\subseteq\ldots;$$

б) каждая точка области Ω попадает строго внутрь всех множеств Φ_{h_k}, начиная с некоторого k.

Отметим, что для любого открытого множества существует хотя бы одна исчерпывающая система внутренних сеточных множеств. В самом деле, строя внутреннее сеточное множество, мы можем включить в него все кубики сетки, которые вместе с границей лежат внутри Ω. Полученная таким путём система внутренних сеточных множеств будет исчерпывающей. Действительно, любая точка P_0 из множества Ω может быть окружена малым шаром σ, принадлежащим Ω. Следовательно, при достаточно мелкой сетке, когда наибольшая диагональ кубика с ребром h станет меньше радиуса шара σ, один из кубиков вместе с точкой P_0 войдёт в Φ_h, что и требовалось доказать.

Положим

$$J_k=\int\limits_{\Phi_{h_k}}\!\!\ldots\!\int f(x_1,\,x_2,\ldots,\,x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

где Φ_{h_k} образуют исчерпывающую систему сеточных множеств. Ввиду неотрицательности функции f величина J_k с возрастанием k не убывает. Если при $k\to\infty$ последовательность J_k остаётся ограниченной, то, очевидно, она стремится к некоторому пределу. Этот предел мы и назовём интегралом от функции $f(x_1,\,x_2,\ldots,\,x_n)$ по области Ω:

$$\int\limits_{\Omega}\!\!\ldots\!\int f(x_1,\,x_2,\ldots,\,x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$
$$=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Phi_{h_k}}\!\!\ldots\!\int f(x_1,\,x_2,\ldots,\,x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

Этот предел, как мы докажем, не зависит от того, каким способом выбрана исчерпывающая система и как расположены координатные оси в пространстве.

Интеграл

$$\int\limits_{\Omega}\!\!\ldots\!\int f(x_1,\,x_2,\ldots,\,x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

мы будем более кратко записывать в виде

$$\int\limits_{\Omega} f\,dv \quad \text{или} \quad \int\limits_{\Omega} f\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

Замечание 1. Функция f, неотрицательная, ограниченная и непрерывная в ограниченном открытом множестве Ω, интегрируема в этом множестве. В самом деле, интегралы по исчерпывающей системе сеточных множеств ограничены в совокупности и, следовательно, стремятся к определённому пределу.

Лемма 1. *Рассмотрим расширяющуюся систему открытых множеств*

$$\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \ldots \subseteq \Omega_k \subseteq \ldots$$

и пусть $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \ldots + \Omega_k + \ldots$ *Тогда любое замкнутое ограниченное множество F, лежащее целиком внутри Ω, попадёт внутрь всех Ω_k, начиная с некоторого k.*

В самом деле, допустим, что утверждение леммы не имеет места. Тогда для любого k можно указать точку P_k, принадлежащую F, но не принадлежащую Ω_k. Множество точек P_k имеет по крайней мере одну предельную точку P_0, принадлежащую, очевидно, F. Легко видеть, что P_0 не принадлежит ни одному Ω_k, ибо в любой его окрестности имеются точки P_k со сколь угодно большими номерами k. Это, однако, невозможно, так как множество F принадлежит сумме Ω и, следовательно, должно принадлежать одному из слагаемых суммы Ω. Полученное противоречие доказывает лемму.

Покажем теперь, что интеграл по открытому множеству не зависит ни от направления координатных осей в пространстве, ни от способа составления исчерпывающей системы внутренних сеточных множеств.

Рассмотрим открытые множества Ω_k, состоящие из всех внутренних точек множеств Φ_{h_k}. Сумма этих открытых множеств есть открытое множество Ω и, значит, любое замкнутое множество F, лежащее внутри Ω, будет содержаться во всех сеточных множествах Φ_{h_k}, начиная с некоторого k. Пусть Φ_{h_k} и Ψ_{h_k} — две исчерпывающие системы сеточных множеств, не обязательно заданные в одной и той же системе координат. В силу леммы 1 при надлежащем выборе $k_2 = k_2(k_1)$ и $k_3 = k_3(k_2)$ и любом k_1 будем иметь

$$\Phi_{h_{k_1}} \subseteq \Psi_{h_{k_2}} \subseteq \Phi_{h_{k_3}}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Phi_{h_{k_1}}} f\,dv \leqslant \int\limits_{\Psi_{h_{k_2}}} f\,dv \leqslant \int\limits_{\Phi_{h_{k_3}}} f\,dv,$$

откуда видно, что пределы по системам Φ_h и Ψ_h равны. Независимость интеграла от выбора исчерпывающей системы сеточных множеств и направления осей координат доказана.

Каждая неотрицательная функция, интегрируемая на открытом множестве Ω, интегрируема на любом открытом подмножестве Ω_1. В самом деле, интегралы по исчерпывающей системе сеточных множеств для Ω_1 будут мажорироваться интегралами по соответствующим сеточным множествам, построенным для Ω, поэтому они образуют ограниченную и, следовательно, сходящуюся последовательность.

Замечание 2. Если $\Omega_2 \subset \Omega_1$ и функция f неотрицательна, то

$$\int\limits_{\Omega_2} f\,dv \leqslant \int\limits_{\Omega_1} f\,dv.$$

Действительно, исчерпывающие множества для Ω_2 можно брать так, чтобы они входили в исчерпывающие множества для Ω_1.

Замечание 3. Если f_1 и f_2 — какие-либо две неотрицательные функции, непрерывные и интегрируемые в Ω, то и их сумма f_1+f_2 интегрируема в Ω, причём

$$\int_{\Omega} (f_1+f_2)\,dv = \int_{\Omega} f_1\,dv + \int_{\Omega} f_2\,dv.$$

Доказательство этого утверждения не представляет труда. Оно получается предельным переходом из очевидного равенства

$$\int_{\Phi_h} (f_1+f_2)\,dv = \int_{\Phi_h} f_1\,dv + \int_{\Phi_h} f_2\,dv.$$

Замечание 4. Если f неотрицательна, непрерывна и интегрируема в Ω, то и af при $a \geqslant 0$ обладает этими свойствами, причём

$$\int_{\Omega} af\,dv = a\int_{\Omega} f\,dv.$$

Доказательство этого утверждения также не представляет труда.

Теорема 4. *Пусть Ω_1 и Ω_2 — два открытых множества, которые могут пересекаться друг с другом, и пусть f — непрерывная неотрицательная функция в множестве $\Omega_1+\Omega_2$, интегрируемая по этому множеству. Тогда справедливо соотношение*

$$\int_{\Omega_1} f\,dv + \int_{\Omega_2} f\,dv = \int_{\Omega_1+\Omega_2} f\,dv + \int_{\Omega_1\Omega_2} f\,dv. \tag{VI.1}$$

Построим в Ω_1 и Ω_2 исчерпывающие сеточные множества $\Phi_h^{(1)}$ и $\Phi_h^{(2)}$. Очевидно,

$$\int_{\Phi_h^{(1)}} f\,dv + \int_{\Phi_h^{(2)}} f\,dv = \int_{\Phi_h^{(1)}+\Phi_h^{(2)}} f\,dv + \int_{\Phi_h^{(1)}\Phi_h^{(2)}} f\,dv. \tag{VI.2}$$

Легко видеть, что множества $\Phi_h^{(1)}+\Phi_h^{(2)}$ образуют исчерпывающую систему для множества $\Omega_1+\Omega_2$, ибо каждая точка этого множества рано или поздно попадёт в какое-либо множество $\Phi_h^{(1)}$ или $\Phi_h^{(2)}$, а $\Phi_h^{(1)}\Phi_h^{(2)}$ образуют исчерпывающую систему для $\Omega_1\Omega_2$, ибо каждая точка этого множества рано или поздно попадёт в оба сеточных множества $\Phi_h^{(1)}$ и $\Phi_h^{(2)}$. Поэтому, переходя к пределу в (VI.2), получим (VI.1). Теорема доказана.

Следствие. *Интеграл по сумме конечного числа открытых множеств от неотрицательной функции не превосходит суммы интегралов, взятых по всем этим множествам:*

$$\int_{\Omega} f\,dv \leqslant \int_{\Omega_1} f\,dv + \int_{\Omega_2} f\,dv + \ldots + \int_{\Omega_k} f\,dv.$$

Отсюда следует, что если все интегралы по открытым множествам Ω_k существуют, то и интеграл по Ω существует.

Теорема 5. *Пусть дана расширяющаяся последовательность открытых множеств*

$$\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \ldots \subseteq \Omega_k \subseteq \ldots$$

Обозначим через Ω_0 *их сумму*

$$\Omega_1 + \Omega_2 + \ldots + \Omega_k + \ldots$$

Пусть f — *какая-либо неотрицательная, непрерывная и интегрируемая функция в* Ω_0. *Тогда*

$$\int\limits_{\Omega_0} f\,dv = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k} f\,dv.$$

Доказательство. Очевидно,

$$\int\limits_{\Omega_0} f\,dv \geqslant \int\limits_{\Omega_k} f\,dv,$$

поэтому

$$\int\limits_{\Omega_0} f\,dv \geqslant \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k} f\,dv. \qquad (*)$$

Построим систему исчерпывающих сеточных множеств Φ_h для открытого множества Ω_0. На основании леммы 1 каждое такое сеточное множество будет целиком заключено в некотором Ω_n.

Мы будем иметь, следовательно,

$$\int\limits_{\Phi_h} f\,dv \leqslant \int\limits_{\Omega_n} f\,dv \leqslant \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k} f\,dv$$

и, переходя к пределу при $h\to 0$, получим:

$$\int\limits_{\Omega_0} f\,dv \leqslant \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k} f\,dv.$$

Сопоставляя это неравенство с (*), имеем:

$$\int\limits_{\Omega_0} f\,dv = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k} f\,dv,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Пусть дана последовательность открытых множеств* $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k, \ldots$ (*не обязательно расширяющаяся*) *и* f — *некоторая неотрицательная непрерывная функция. Если суммы*

$$\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\Omega_k} f\,dv$$

ограничены в совокупности, то существует интеграл по сумме Ω

множеств Ω_k *и справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Omega_0} f\,dv = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_1+\Omega_2+\ldots+\Omega_k} f\,dv \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{k\to\infty}\left[\int\limits_{\Omega_1} f\,dv + \int\limits_{\Omega_2} f\,dv + \ldots + \int\limits_{\Omega_k} f\,dv\right].$$

Замечание 5. Пусть Ω — открытое множество, Φ_h — сеточное множество, содержащееся в нём, а f — неотрицательная функция, непрерывная и интегрируемая в Ω. Тогда

$$\int\limits_{\Omega-\Phi_h} f\,dv + \int\limits_{\Phi_h} f\,dv = \int\limits_{\Omega} f\,dv.$$

Для доказательства достаточно взять какую-либо исчерпывающую систему Ψ_k для $\Omega - \Phi_h$ и убедиться, что множества $\Psi_k + \Phi_h$ образуют исчерпывающую систему для Ω.

Важное значение имеет следующая

Теорема 6. *Пусть дана сужающаяся последовательность открытых множеств* $\Omega_1 \supseteq \Omega_2 \supseteq \ldots \supseteq \Omega_k \supseteq \ldots$ *и пусть пересечение их также представляет собой открытое множество* (в частности, оно может быть пустым): $\Omega_0 = \Omega_1\Omega_2\ldots\Omega_k\ldots$ *Пусть* f — *непрерывная, неотрицательная и интегрируемая на* Ω_1 *функция. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega_0} f\,dv = \lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Omega_k} f\,dv$$

(если Ω_0 — *пустое множество, предел этот равен нулю).*

Доказательство. Приведём каждому множеству Ω_k в соответствие внутреннее сеточное множество $\Phi_h^{(k)}$ так, чтобы имело место неравенство

$$\int\limits_{\Omega_k} f\,dv - \int\limits_{\Phi_h^{(k)}} f\,dv < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Составим открытые множества $\Omega'_k = \Omega_k - \Phi_h^{(k+1)}$. Нетрудно видеть, что открытое множество Ω_1 совпадает с суммой

$$\Omega_0 + \Omega'_1 + \ldots + \Omega'_k + \ldots$$

На основании следствия из теоремы 4

$$\int\limits_{\Omega_1} f\,dv \leqslant \int\limits_{\Omega_0} f\,dv + \int\limits_{\Omega'_1} f\,dv + \ldots + \int\limits_{\Omega'_k} f\,dv + \ldots$$

Но, в силу выбора $\Phi_h^{(k+1)}$ и замечания 5,

$$\int\limits_{\Omega'_k} f\,dv = \int\limits_{\Omega_k} f\,dv - \int\limits_{\Phi_h^{(k+1)}} f\,dv \leqslant \int\limits_{\Omega_k} f\,dv - \int\limits_{\Omega_{k+1}} f\,dv + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

и, значит,

$$\int_{\Omega_1} f\,dv \leqslant \int_{\Omega_0} f\,dv + \left(\int_{\Omega_1} f\,dv - \int_{\Omega_2} f\,dv + \frac{\varepsilon}{2^2}\right) + \left(\int_{\Omega_2} f\,dv - \int_{\Omega_3} f\,dv + \frac{\varepsilon}{2^3}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\int_{\Omega_k} f\,dv - \int_{\Omega_{k+1}} f\,dv + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) + \ldots =$$

$$= \int_{\Omega_0} f\,dv + \lim_{k\to\infty}\left(\int_{\Omega_1} f\,dv - \int_{\Omega_k} f\,dv\right) + \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} f\,dv \leqslant \int_{\Omega_0} f\,dv + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Утверждение теоремы следует теперь из того, что, очевидно,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} f\,dv \geqslant \int_{\Omega_0} f\,dv.$$

В этом параграфе рассматривались только неотрицательные функции. В § 4 мы покажем, что интегрирование знакопеременных функций сводится к интегрированию неотрицательных функций. Это будет доказано для более общего понятия интеграла, а именно, для интеграла Лебега, частными случаями которого являются интегралы от непрерывной функции на открытом (§ 2) и замкнутом (§ 3) множествах.

§ 3. Интегралы по ограниченным замкнутым множествам от непрерывных функций.

Перейдём теперь к определению понятия интеграла от непрерывной функции по ограниченному замкнутому множеству. Естественно сделать это следующим образом. Пусть функция f определена на некотором ограниченном замкнутом множестве F и непрерывна на нём. Заключим F в некоторое открытое множество. Пусть нам удалось непрерывным образом продолжить функцию f на открытое множество Ω и f оказалась интегрируема в этом множестве. Образуем ещё открытое множество $\Omega - F$. Тогда, по определению, положим

$$\int_F f\,dv = \int_\Omega f\,dv - \int_{\Omega - F} f\,dv.$$

Однако в этом определении остаётся ещё много недоказанного. Неясно, во-первых, всегда ли можно непрерывно продолжить функцию f и получить при этом интегрируемую функцию и, во-вторых, неизвестно, приводит ли подобное определение интеграла к однозначному результату.

Для того чтобы выяснить корректность нашего определения, мы докажем сейчас несколько вспомогательных предложений.

Пусть f — какая-нибудь неотрицательная функция, непрерывная и интегрируемая в открытом множестве Ω_1. Далее, пусть Ω содержится в Ω_1, а F — замкнутое множество, заключённое в Ω. Мы будем иметь

$$\Omega+(\Omega_1-F)=\Omega_1,\quad \Omega(\Omega_1-F)=\Omega-F.$$

Отсюда, на основании теоремы 4,

$$\int\limits_{\Omega} f\,dv+\int\limits_{\Omega_1-F} f\,dv=\int\limits_{\Omega_1} f\,dv+\int\limits_{\Omega-F} f\,dv$$

и, значит,

$$\int\limits_{\Omega} f\,dv-\int\limits_{\Omega-F} f\,dv=\int\limits_{\Omega_1} f\,dv+\int\limits_{\Omega_1-F} f\,dv.$$

Пусть f неотрицательна, непрерывна и интегрируема в открытых множествах Ω_1 и Ω_2, а $F\subseteq\Omega_1\Omega_2$. Положим $\Omega=\Omega_1\Omega_2$. По доказанному

$$\int\limits_{\Omega} f\,dv-\int\limits_{\Omega-F} f\,dv=\int\limits_{\Omega_1} f\,dv-\int\limits_{\Omega_1-F} f\,dv=\int\limits_{\Omega_2} f\,dv-\int\limits_{\Omega_2-F} f\,dv.$$

Мы получили важный результат:

Разность

$$\int\limits_{\Omega} f\,dv-\int\limits_{\Omega-F} f\,dv$$

не зависит от выбора открытого множества Ω.

Лемма 2. *Пусть непрерывная функция f обращается в нуль в точках некоторого ограниченного замкнутого множества F, лежащего внутри открытого множества Ω; тогда*

$$\int\limits_{\Omega} f\,dv=\int\limits_{\Omega-F} f\,dv.$$

Предположим сначала, что множество Ω ограничено.

В силу сказанного выше (см. стр. 83, Замечание 2)

$$\int\limits_{\Omega-F} f\,dv\leqslant\int\limits_{\Omega} f\,dv. \qquad (**)$$

Рассмотрим открытое множество Ω_ε тех точек, в которых $f<\varepsilon$, где ε — малое положительное число. Пользуясь ограниченностью множества Ω и, значит, всех Ω_ε, мы видим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\,dv=0.$$

На основании следствия из теоремы 4

$$\int\limits_{\Omega} f\,dv\leqslant\int\limits_{\Omega-F} f\,dv+\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\,dv$$

и, значит,

$$\int\limits_{\Omega-F} f\,dv \geqslant \int\limits_{\Omega} f\,dv.$$

Сопоставляя это с (**), получим нашу лемму.

В общем случае представим множество Ω как сумму расширяющихся ограниченных открытых множеств Ω_k. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в равенстве

$$\int\limits_{\Omega_k} f\,dv = \int\limits_{\Omega_k - F} f\,dv,$$

получим доказываемое утверждение.

Если две функции f_1 и f_2 совпадают во всех точках замкнутого множества F, то для них имеет место равенство

$$\int\limits_{\Omega} f_1\,dv - \int\limits_{\Omega-F} f_1\,dv = \int\limits_{\Omega} f_2\,dv - \int\limits_{\Omega-F} f_2\,dv.$$

В самом деле, из леммы 2 следует равносильное равенство

$$\int\limits_{\Omega} (f_1-f_2)\,dv = \int\limits_{\Omega-F} (f_1-f_2)\,dv.$$

Доказанное утверждение означает, что определённый выше интеграл от функции f, непрерывной на замкнутом множестве F, по этому множеству не зависит от способа продолжения f вне F. Нам остаётся ещё установить возможность такого продолжения.

Лемма 3. *Рассмотрим открытое множество Ω с границей C. Пусть F — замкнутое множество, лежащее в множестве $\Omega+C$. Пусть на F задана некоторая непрерывная неотрицательная функция f. Тогда в $\Omega+C$ можно построить непрерывную неотрицательную функцию φ, совпадающую с f в точках F. При этом наибольшее и наименьшее значения φ равны соответственно наибольшему и наименьшему значению f.*

Как было показано на стр. 81, каждая точка P области Ω, не принадлежащая F, находится на конечном положительном расстоянии $\delta(P)$ от множества F. Построим шар радиуса R с центром в данной точке P и рассмотрим максимальное значение функции f в этом шаре.

Пусть

$$\max_{r \leqslant R} f = M_P(R).$$

Если точек F внутри этого шара нет, то будем считать $M_P(R) = 0$. $M_P(R)$ — монотонно возрастающая и, следовательно, интегрируемая в обычном смысле слова функция [1]).

---

[1]) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. I, стр. 282. Изд. 11-е. Л.—М. 1948.

За функцию φ можно взять, например,

$$\varphi(P)=\frac{1}{\delta(P)}\int\limits_{\delta(P)}^{2\delta(P)} M_P(R)\,dR.$$

В точках множества F положим $\varphi(P)=f(P)$.

Докажем, что при таком определении $\varphi(P)$ будет непрерывной. В самом деле, в точке P_1, отстоящей на расстоянии $\delta>0$ от точки P_0 множества F, значение этой функции заключено между

$$\min_{r\leqslant 3\delta} f(P) \quad \text{и} \quad \max_{r\leqslant 3\delta} f(P),$$

причём шар радиуса 3δ берётся с центром в точке P_0, и, следовательно, $f(P_1)$ стремится к $f(P_0)$ при $\delta\to 0$ в силу непрерывности f.

Для двух точек P_1 и P_2, не являющихся точками F, отстоящих одна от другой на величину h, имеем:

$$M_{P_1}(R)\leqslant M_{P_2}(R+h) \quad \text{и} \quad \delta(P_1)\leqslant\delta(P_2)+h,$$
$$M_{P_2}(R)\leqslant M_{P_1}(R+h) \quad \text{и} \quad \delta(P_2)\leqslant\delta(P_1)+h.$$

Будем считать $h<\min\left\{\frac{\delta(P_1)}{3};\ \frac{\delta(P_2)}{3}\right\}$; тогда

$$\varphi(P_1)-\varphi(P_2)=\frac{1}{\delta(P_1)}\int\limits_{\delta(P_1)}^{2\delta(P_1)} M_{P_1}(R)\,dR-\frac{1}{\delta(P_2)}\int\limits_{\delta(P_2)}^{2\delta(P_2)} M_{P_2}(R)\,dR\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\delta(P_1)}\int\limits_{\delta(P_1)}^{2\delta(P_1)} M_{P_1}(R)\,dR-\frac{1}{\delta(P_1)+h}\int\limits_{\delta(P_1)+h}^{2\delta(P_1)-2h} M_{P_1}(R-h)\,dR=$$
$$=\frac{1}{\delta(P_1)}\int\limits_{\delta(P_1)}^{2\delta(P_1)-3h} M_{P_1}(R)\,dR+\frac{1}{\delta(P_1)}\int\limits_{2\delta(P_1)-3h}^{2\delta(P_1)} M_{P_1}(R)\,dR-$$
$$-\frac{1}{\delta(P_1)+h}\int\limits_{\delta(P_1)}^{2\delta(P_1)-3h} M_{P_1}(y)\,dy=\frac{h}{\delta(P_1)\,[\delta(P_1)+h]}\int\limits_{\delta(P_1)}^{2\delta(P_1)-3h} M_{P_1}(R)\,dR+$$
$$+\frac{1}{\delta(P_1)}\int\limits_{2\delta(P_1)-3h}^{2\delta(P_1)} M_{P_1}(R)\,dR\leqslant\frac{h}{[\delta(P_1)]^2}\int\limits_{\delta(P_1)}^{2\delta(P_1)} M_{P_1}(R)\,dR+$$
$$+\frac{1}{\delta(P_1)}\int\limits_{2\delta(P_1)-3h}^{2\delta(P_1)} M_{P_1}(R)\,dR\leqslant\frac{4hM}{\delta(P_1)},$$

где $M=\max f\geqslant M_P(R)$.

При достаточно малом h эта величина сколь угодно мала и, значит, при любом заданном $\varepsilon>0$ для достаточно малых h имеем $\varphi(P_1)-\varphi(P_2)<\varepsilon$. Но точки P_1 и P_2 равноправны, поэтому справедливо также неравенство $\varphi(P_2)-\varphi(P_1)<\varepsilon$. Отсюда следует непрерывность $\varphi(P)$, и лемма доказана.

Заметим, что случай, когда функция f принимает значения разных знаков, легко свести к предыдущему, рассматривая вместо f функцию $f+c$, где c — положительное достаточно большое постоянное число.

Понятие интеграла по замкнутому множеству нами, таким образом, обосновано. Мы доказали одновременно, что всякая неотрицательная функция f, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве F, интегрируема на этом множестве. В самом деле, если воспользоваться, на основании теоремы Вейерштрасса, ограниченностью функции f, то прямое применение леммы 3 устанавливает интегрируемость f. Для таких замкнутых множеств, как параллелепипеды или сеточные множества, наше определение интеграла, очевидно, полностью совпадает с обычным определением интеграла Римана для непрерывных функций.

Справедлива следующая

Теорема 7. *Пусть F_1 и F_2 — ограниченные замкнутые множества и f — неотрицательная, непрерывная на каждом из них функция. Тогда*

$$\int\limits_{F_1} f\,dv + \int\limits_{F_2} f\,dv = \int\limits_{F_1+F_2} f\,dv + \int\limits_{F_1F_2} f\,dv.$$

Эта теорема легко сводится к теореме 4, если заключить F_1+F_2 в область Ω и обозначить $\Omega - F_1 = \Omega_1$, $\Omega - F_2 = \Omega_2$. Принимая во внимание, что

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega - F_1F_2,$$
$$\Omega_1\Omega_2 = \Omega - (F_1+F_2),$$

получим

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{F_1} f\,dv = \int\limits_{\Omega} f\,dv - \int\limits_{\Omega_1} f\,dv; \quad \int\limits_{F_2} f\,dv = \int\limits_{\Omega} f\,dv - \int\limits_{\Omega_2} f\,dv; \\ &\int\limits_{F_1+F_2} f\,dv = \int\limits_{\Omega} f\,dv - \int\limits_{\Omega_1\Omega_2} f\,dv; \quad \int\limits_{F_1F_2} f\,dv = \int\limits_{\Omega} f\,dv - \int\limits_{\Omega_1+\Omega_2} f\,dv. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.3)}$$

Из формул (VI.1) и (VI.3) и следует наша теорема.

Теорема 8. *Пусть $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_k \supseteq \ldots$ — сужающаяся последовательность ограниченных замкнутых множеств. Обозначим через F_0 их пересечение: $F_0 = F_1F_2 \ldots F_k \ldots$ Пусть f — некоторая неотрицательная непрерывная функция на F_1. Тогда*

$$\int\limits_{F_0} f\,dv = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{F_k} f\,dv.$$

Доказательство этой теоремы сводится к теореме 5 из предыдущего параграфа, если продолжить f на открытое множество Ω, содержащее F_1, и положить $\Omega_k = \Omega - F_k$. Тогда, полагая ещё

$$\Omega_0 = \Omega_1 + \Omega_2 + \ldots + \Omega_k + \ldots,$$

мы будем иметь

$$\Omega - \Omega_0 = F_0,$$

$$\int\limits_{F_k} f\,dv = \int\limits_{\Omega} f\,dv - \int\limits_{\Omega_k} f\,dv \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Пользуясь теоремой 5 из § 2 и переходя к пределу, докажем наше предложение.

Теорема 9. *Если пересечение сужающейся последовательности открытых множеств*

$$\Omega_1 \supseteq \Omega_2 \supseteq \ldots \supseteq \Omega_k \supseteq \ldots$$

есть замкнутое множество F:

$$F = \Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_k \ldots,$$

то

$$\int_F f\,dv = \lim_{k \to \infty} \int_{\Omega_k} f\,dv.$$

В самом деле, пусть

$$\Omega'_k = \Omega_k - F,$$

тогда

$$\int_F f\,dv = \int_{\Omega_k} f\,dv - \int_{\Omega'_k} f\,dv.$$

Переходя к пределу в обеих частях равенства и замечая, что

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\Omega'_k} f\,dv = 0$$

в силу теоремы 6. ибо пересечение Ω'_k пусто, получим $\int_F f\,dv = \lim_{k \to \infty} \int_{\Omega_k} f\,dv$, что и требовалось доказать. Заметим, что любое замкнутое множество F всегда можно представить как пересечение вложенных друг в друга открытых множеств Ω_k. В самом деле, за Ω можно взять множество точек, расстояние которых до замкнутого множества F меньше, чем ε_k, где $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$. Очевидно, что пересечение таких множеств Ω_k будет содержать только точки, расстояние которых до F равно нулю, и, следовательно, будет совпадать с замкнутым множеством F.

Теорема 10. *Пусть* $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots \subseteq F_k \subseteq \ldots$ — *расширяющаяся последовательность замкнутых множеств и пусть сумма их E ограничена и является замкнутым или открытым множеством. Пусть f — неотрицательная функция, непрерывная на всех F_k и E, интегрируемая на E, если E — открытое множество. Тогда*

$$\int_E f\,dv = \lim_{k \to \infty} \int_{F_k} f\,dv.$$

Теорема сводится к предыдущей в случае открытого множества $E = \Omega$, если перейти к рассмотрению открытых множеств $\Omega_k = \Omega - F_k$, и к теореме 6, если множество $E = F$ замкнуто.

Рассмотрим теперь частный случай $f = 1$.

Будем называть интегралы

$$\int_\Omega dv \quad \text{и} \quad \int_F dv$$

соответственно лебеговой мерой открытого множества или замкнутого множества F. Меру открытого множества или замкнутого множества F мы будем обозначать

$$m\Omega \quad \text{или} \quad mF.$$

Все доказанные выше теоремы об интегралах, будучи применены к случаю $f=1$, дают сразу аналогичные теоремы о мере открытых или замкнутых множеств. Мера является естественным обобщением объёма. К свойствам меры мы ещё вернёмся.

Для применений важное значение имеет следующая

Теорема 11. (О среднем значении.) *Пусть E — замкнутое или открытое множество, на котором функция f непрерывна. В случае, когда E — открытое множество, будем ещё предполагать, что E имеет конечную меру и f на E интегрируема. Пусть везде на E выполнены неравенства*

$$M_1 \leqslant f \leqslant M_2,$$

где M_1, M_2 — постоянные. Тогда

$$M_1 mE \leqslant \int_E f\,dv \leqslant M_2 mE.$$

Доказательство этой теоремы совершенно очевидно: оно получается из того, что

$$\int_E (f-M_1)\,dv \geqslant 0, \qquad \int_E (M_2-f)\,dv \geqslant 0.$$

§ 4. Суммируемые функции.

Переходим к рассмотрению общей теории интеграла Лебега.

Пусть f — произвольная неотрицательная функция, заданная в ограниченном открытом множестве Ω. Рассмотрим все замкнутые множества F, на которых f непрерывна, и определим верхнюю грань интегралов от f, взятых по множествам F:

$$\sup_F \int_F f\,dv.$$

Будем называть эту верхнюю грань, если она существует и конечна, внутренним интегралом по множеству Ω от функции f и обозначать

$$(вн)\int_\Omega f\,dv.$$

Понятие внутреннего интеграла приобретает особое значение в тех случаях, когда замкнутые множества F, на которых функция f непрерывна, имеют достаточно большую меру.

Функция f, заданная в некотором ограниченном открытом множестве Ω, называется измеримой, если существуют замкнутые множества F_δ с мерой, сколь угодно близкой к мере Ω, на которых f непрерывна:

$$m\Omega - mF_\delta \leqslant \delta,$$

где δ — любое положительное число.

Если неотрицательная измеримая функция f в открытом множестве Ω имеет внутренний интеграл, то она называется интегрируемой в смысле Лебега, а внутренний интеграл от неё называют просто интегралом или интегралом Лебега. В этом случае мы будем пользоваться обычным обозначением интеграла.

Как мы докажем далее, интеграл Лебега обладает рядом весьма важных свойств, чрезвычайно упрощающих пользование им. Следующий простой пример показывает, что для неизмеримых функций внутренний интеграл даже тогда, когда он существует, не обладает важнейшими свойствами обычного интеграла.

Рассмотрим функцию f, положительную в открытом множестве Ω и имеющую там внутренний интеграл, но не измеримую. (Можно доказать, что такие функции существуют.)

Ввиду неизмеримости функции f замкнутые множества, где f непрерывна, имеют меру, существенно меньшую, чем $m\Omega$, т. е.

$$\sup_F mF = a < m\Omega.$$

Очевидно, замкнутые множества непрерывности для f и $f+1$ будут одни и те же. Для любого из них имеем

$$\int_F (f+1)\,dv - \int_F f\,dv = mF$$

(см. замечание 3 на стр. 84).

Отсюда

$$\int_F (f+1)\,dv = \int_F f\,dv + mF \leqslant \sup_{F_1} \int_{F_1} f\,dv + a$$

и

$$(вн) \int_\Omega (f+1)\,dv \leqslant (вн) \int_\Omega f\,dv + a.$$

Последнее неравенство означает, что для внутреннего интеграла от неизмеримых функций не выполнено, вообще говоря, свойство аддитивности:

$$(вн) \int_\Omega (f+1)\,dv \neq (вн) \int_\Omega f\,dv + (вн) \int_\Omega 1\,dv,$$

так как $(вн) \int_\Omega 1\,dv = m\Omega > a.$

З а м е ч а н и е. Лемма 3 из § 3 позволяет дать другую формулировку условия измеримости: функция f измерима в открытом множестве Ω тогда и только тогда, если существуют непрерывные функции f_k, совпадающие с f на замкнутых множествах F_k с мерой, сколь угодно близкой к мере Ω.

Л е м м а 4. *Пусть f — измеримая неотрицательная функция в ограниченном открытом множестве Ω и пусть F_ε — некоторая система замкнутых множеств, на которых f непрерывна, таких, что*

$$m\Omega - mF_\varepsilon < \varepsilon.$$

Если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{F_\varepsilon} f\,dv,$$

то функция f суммируема, и этот предел равен $\int_\Omega f\,dv$.

Если хотя бы одно из этих утверждений оказалось неверным, то имело бы место неравенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{F_\varepsilon} f\,dv < \sup_F \int_F f\,dv,$$

так как, по определению, либо $\sup\limits_F \int\limits_F f\,dv = \infty$, либо $\sup\limits_F \int\limits_F f\,dv = \int\limits_\Omega f\,dv$. Мы могли бы, следовательно, указать такое замкнутое множество F_0, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ имело место неравенство

$$\int\limits_{F_0} f\,dv - \int\limits_{F_\varepsilon} f\,dv \geqslant \eta > 0,$$

причём f непрерывна на F_0, а η не зависит от ε. Положим $F'_\varepsilon = F_0 F_\varepsilon$. Усиливая предыдущее неравенство, получим

$$\int\limits_{F_0} f\,dv - \int\limits_{F'_\varepsilon} f\,dv \geqslant \eta > 0.$$

Функция f на F_0 ограничена. Пусть $f \leqslant M$. При этом

$$\int\limits_{F_0} f\,dv - \int\limits_{F'_\varepsilon} f\,dv = \left\{ \int\limits_{F_0} (f-M)\,dv - \int\limits_{F'_\varepsilon} (f-M)\,dv \right\} + M(mF_0 - mF'_\varepsilon).$$

Но выражение в фигурных скобках, очевидно, неположительно и, следовательно,

$$mF_0 - mF'_\varepsilon \geqslant \frac{\eta}{M}.$$

Но в силу теоремы 7

$$mF_0 - mF'_\varepsilon = m(F_0 + F_\varepsilon) - mF_\varepsilon < \varepsilon,$$

и мы получаем

$$\frac{\eta}{M} < \varepsilon.$$

Следовательно, наше предположение неправильно. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть в ограниченном открытом множестве задана расширяющаяся система замкнутых множеств*

$$F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots \subseteq F_k \subseteq \ldots,$$

причём $mF_k > m\Omega - \delta_k$, где $\delta_k \to 0$ при $k \to 0$. Пусть f — неотрицательная измеримая функция, непрерывная на всех F_k. Если интегралы

$$\int\limits_{F_k} f\,dv$$

ограничены одним и тем же числом A, то функция f суммируема в Ω и интеграл от неё выражается формулой

$$\int\limits_\Omega f\,dv = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{F_k} f\,dv.$$

Это следствие непосредственно вытекает из леммы, если принять во внимание, что неубывающая ограниченная последовательность величин

$$\int\limits_{F_k} f\,dv$$

имеет предел.

Теорема 12. *Пусть f суммируема и неотрицательна в ограниченном открытом множестве Ω. Тогда для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, что коль скоро $\Omega_\delta \subseteq \Omega$ и $m\Omega_\delta<\delta$, имеет место неравенство*

$$\int_{\Omega_\delta} f\,dv \leqslant \varepsilon.$$

Предположим обратное. Тогда найдутся такое число $\varepsilon_0>0$ и открытые множества Ω_δ со сколь угодно малой мерой

$$m\Omega_\delta<\delta,$$

для которых

$$\int_{\Omega_\delta} f\,dv \geqslant \varepsilon_0. \tag{VI.4}$$

С помощью открытых множеств Ω_δ можно построить сужающуюся последовательность открытых множеств Ω_k, для которых $m\Omega_k<\delta_k$, $\delta_k\to 0$ при $k\to\infty$ и выполнено неравенство (VI.4). Для этого достаточно, например, выбрать из Ω_δ какую-то последовательность множеств Ω'_s так, чтобы

$$m\Omega'_s<\frac{1}{2^{s+1}},$$

и положить $\Omega_k=\sum_{s=k}^{\infty}\Omega'_s$. По следствию теоремы 6 получим $m\Omega_k<\frac{1}{2^k}$, так что можно считать $\delta_k=\frac{1}{2^k}$. Пусть F_k — расширяющаяся система замкнутых исчерпывающих множеств для f в Ω, причём $m(\Omega-F_k)<\delta_k$. Тогда замкнутые множества $F_k^*=F_k-\Omega_k$ обладают тем свойством, что

$$mF_k^*>m\Omega-2\delta_k.$$

Это следует из того, что

$$\Omega-F_k^*\subseteq(\Omega-F_k)+\Omega_k$$

и, значит,

$$m(\Omega-F_k^*)\leqslant m(\Omega-F_k)+m\Omega_k\leqslant 2\delta_k.$$

На основании следствия из леммы 4 множества F_k^* суть исчерпывающие множества для f в Ω и

$$\lim_{k\to\infty}\int_{F_k^*} f\,dv=\int_{\Omega} f\,dv.$$

При этом для достаточно большого k

$$\int_{F_k} f\,dv>\int_{\Omega} f\,dv-\frac{\varepsilon_0}{3}.$$

С другой стороны, внутри множества Ω_k можно найти такое замкнутое множество F_k^{**}, на котором f непрерывна и для которого

$$\int_{F_k^{**}} f\,dv>\frac{2\varepsilon_0}{3}.$$

По построению F_k^* не имеет общих точек с F_k. Тогда функция f непрерывна на замкнутом множестве $F_k^* + F_k^{**}$, причём

$$\int\limits_{F_k^*+F_k^{**}} f\,dv > \int\limits_{\Omega} f\,dv + \frac{\varepsilon_0}{3}.$$

Это, однако, невозможно, так как $\int\limits_{\Omega} f\,dv = \sup\limits_{F} \int\limits_{F} f\,dv$. Полученное противоречие доказывает нашу теорему. Доказанное нами свойство, имеющее основное значение, называют абсолютной непрерывностью интеграла Лебега. Оно полностью характеризует зависимость интеграла Лебега от множества, по которому происходит интегрирование. Впоследствии мы неоднократно будем пользоваться этим свойством.

Займёмся теперь более подробным выяснением зависимости интеграла Лебега от подинтегральной функции.

Лемма 5. *Если функция f_2 измерима и неотрицательна, а f_1 суммируема, причём*

$$f_2 \leqslant f_1,$$

то и функция f_2 также суммируема и, кроме того, имеет место неравенство

$$\int\limits_{\Omega} f_2\,dv \leqslant \int\limits_{\Omega} f_1\,dv.$$

В самом деле, рассмотрим расширяющуюся систему замкнутых множеств $F_\varepsilon^{(1)}$, мера которых стремится к $m\Omega$ и на которых непрерывна функция f_1, а также аналогичную систему $F_\varepsilon^{(2)}$ для функции f_2. Мера множеств $F_\varepsilon^{(3)} = F_\varepsilon^{(1)} F_\varepsilon^{(2)}$, как вытекает из теоремы 7, будет стремиться к $m\Omega$. Мы имеем

$$\int\limits_{F_\varepsilon^{(3)}} f_2\,dv \leqslant \int\limits_{F_\varepsilon^{(3)}} f_1\,dv \leqslant \int\limits_{\Omega} f_1\,dv.$$

Последовательность

$$\int\limits_{F_\varepsilon^{(3)}} f_2\,dv$$

не убывает, ограничена и, следовательно, имеет предел. На основании леммы 4 функция f_2 суммируема. Переходя к пределу, убеждаемся в справедливости написанного выше неравенства для интегралов от f_1 и f_2.

Теорема 13. *Если f_1 и f_2 неотрицательны и суммируемы в Ω, то и их сумма f_1+f_2 суммируема, причём*

$$\int\limits_{\Omega} (f_1+f_2)\,dv = \int\limits_{\Omega} f_1\,dv + \int\limits_{\Omega} f_2\,dv. \qquad (*)$$

Построив $F_\varepsilon^{(1)}$ и $F_\varepsilon^{(2)}$ так же, как в предыдущей лемме, и составив $F_\varepsilon^{(3)} = F_\varepsilon^{(1)} F_\varepsilon^{(2)}$, будем иметь

$$mF_\varepsilon^{(3)} \geqslant m\Omega - 2\varepsilon.$$

Функции f_1+f_2 будет, очевидно, непрерывна на $F_\varepsilon^{(3)}$ и, кроме того,

$$\int\limits_{F_\varepsilon^{(3)}} (f_1+f_2)\,dv = \int\limits_{F_\varepsilon^{(3)}} f_1\,dv + \int\limits_{F_\varepsilon^{(3)}} f_2\,dv. \qquad \text{(VI.5)}$$

Правая часть имеет пределом $\int\limits_\Omega f_1\,dv + \int\limits_\Omega f_2\,dv$. Следовательно, левая часть имеет предел.

Применяя лемму 4, убеждаемся в интегрируемости f_1+f_2 и справедливости формулы (*).

До сих пор мы рассматривали лишь интегралы от неотрицательных функций, непрерывных по открытым и замкнутым множествам, а также измеримых по открытым множествам. Перейдём теперь к интегрированию знакопеременных функций. Пусть f — измеримая функция, могущая принимать как положительные, так и отрицательные значения. Положим

$$f^+ = \frac{1}{2}\,[|f|+f],$$

$$f^- = \frac{1}{2}\,[|f|-f].$$

Функции f^+ и f^- называются соответственно положительной и отрицательной частями функции f. Функция f^+ совпадает с функцией f в тех точках, где f положительна, и равна нулю там, где f отрицательна. Напротив, f^- равна нулю в тех точках, где f положительна, и равна $-f$ в точках, где f отрицательна. Очевидно,

$$f = f^+ - f^-.$$

Если функция f непрерывна на замкнутом множестве, то обе функции f^+ и f^- также будут непрерывны на этом множестве. В самом деле, если точка P принадлежит F и в ней f положительна, то f будет положительна во всех точках множества F, достаточно близких к P. При этом в окрестности точки P функция f^+ будет совпадать с f и, следовательно, будет непрерывна. Точно так же доказывается непрерывность f^- в точках, где f отрицательна. В точках, где $f=0$, обе функции f^+ и f^- также будут непрерывны, так как, например, значения f^+ при стремлении точек P_k и P по замкнутому множеству будут либо совпадать со значениями f в этих же точках, либо будут равны нулю, но, во всяком случае, будут стремиться к предельному значению, равному нулю. Отсюда следует

Замечание. Если функция f измерима в открытом множестве Ω, то обе функции f^+, f^- также измеримы в Ω.

Интеграл от функции f по открытому множеству Ω мы определим формулой

$$\int\limits_\Omega f\,dv = \int\limits_\Omega f^+dv - \int\limits_\Omega f^-dv.$$

Функция f называется суммируемой, если суммируемы f^+ и f^-. Из этого определения следует

Теорема 14. *Если функция f суммируема в открытом множестве Ω, то какова бы ни была система замкнутых множеств F_δ, на которых f непрерывна и таких, что*

$$mF_\delta > m\Omega - \delta, \quad \delta \to 0,$$

имеет место равенство

$$\int_{\Omega} f\,dv = \lim_{\delta\to 0} \int_{F_\delta} f\,dv.$$

Для доказательства достаточно заметить, что

$$\int_{F_\delta} f\,dv = \int_{F_\delta} f^+ dv - \int_{F_\delta} f^- dv,$$

и перейти к пределу.

Докажем теперь ещё одну лемму.

Лемма 6. *Пусть функция f, измеримая в открытом множестве Ω, представлена двумя различными способами в виде разности неотрицательных суммируемых функций:*

$$f = f_1 - f_2 \quad \text{и} \quad f = f_3 - f_4.$$

Тогда имеет место равенство

$$\int_{\Omega} f_1\,dv - \int_{\Omega} f_2\,dv = \int_{\Omega} f_3\,dv - \int_{\Omega} f_4\,dv.$$

В самом деле, равенство, которое требуется доказать, равносильно соотношению

$$\int_{\Omega} f_1\,dv + \int_{\Omega} f_4\,dv = \int_{\Omega} f_2\,dv + \int_{\Omega} f_3\,dv,$$

которое немедленно следует из теоремы 13, если принять во внимание, что

$$f_1 + f_4 = f_2 + f_3.$$

Лемма доказана. Из этой леммы следует, между прочим, что, каким бы способом мы ни представили f в виде разности двух неотрицательных суммируемых функций, имеет место равенство:

$$\int_{\Omega} f_1\,dv - \int_{\Omega} f_2\,dv = \int_{\Omega} f^+ dv - \int_{\Omega} f^- dv.$$

Для измеримой функции суммируемость и существование интеграла от абсолютного значения функции равносильны. Действительно, если существует интеграл от $|f| = f^+ + f^-$, то по лемме 5 будут суммируемы каждая из функций f^+ и f^-. Обратно, если суммируемы f^+ и f^-, то по теореме 13 суммируема и функция $|f|$.

Замечание. Пусть c — произвольная постоянная, f — суммируемая в открытом множестве Ω функция. Тогда

$$\int_{\Omega} cf\,dv = c\int_{\Omega} f\,dv.$$

Справедливость этого замечания почти очевидна. Чтобы убедиться в этом, надо воспользоваться аналогичным свойством интегралов от знакопостоянных функций.

Из предыдущего замечания вытекает следующее важное общее свойство интеграла Лебега. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_k$ — суммируемые функции, а $a_1, a_2, \ldots \ldots, a_k$ — произвольные постоянные. Тогда

$$\int_{\Omega} (a_1f_1 + a_2f_2 + \ldots + a_kf_k)\, dv = a_1 \int_{\Omega} f_1\, dv + a_2 \int_{\Omega} f_2\, dv + \ldots + a_k \int_{\Omega} f_k\, dv.$$

Эта формула доказывается полной индукцией. Отметим ещё одно свойство интеграла Лебега.

Теорема 15. *Пусть функция f суммируема, а функция φ измерима и ограничена, причём*

$$|\varphi| \leqslant M.$$

Тогда произведение $f\varphi$ будет суммируемо и

$$\left| \int_{\Omega} f\varphi\, dv \right| \leqslant M \int_{\Omega} |f|\, dv.$$

В самом деле, $|f\varphi| \leqslant M|f|$. Функция $M|f|$ суммируема, значит, и $|f\varphi|$ суммируема, причём

$$\left| \int_{\Omega} f\varphi\, dv \right| \leqslant \int_{\Omega} |f\varphi|\, dv \leqslant M \int_{\Omega} |f|\, dv.$$

§ 5. Неопределённые интегралы от функции одной переменной. Примеры.

Если $f(x)$ — суммируемая функция в промежутке $0 < x < 1$, то она, очевидно, будет суммируема и в любом промежутке $0 < x < y$, где $y \leqslant 1$. Интеграл

$$F(y) = \int_0^y f(x)\, dx$$

называется неопределённым интегралом.

По самому определению меры изолированная точка имеет меру нуль. Поэтому интеграл по открытому промежутку $0 < x < y$ равен интегралу, взятому по любому из следующих полуоткрытых и замкнутых промежутков:

$$0 \leqslant x < y, \quad 0 < x \leqslant y, \quad 0 \leqslant x \leqslant y.$$

Это оправдывает обозначение

$$\int_0^y f(x)\, dx$$

и позволяет утверждать справедливость равенства

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$$

для любой суммируемой функции $f(x)$.

Докажем теорему.

Теорема 16. *Производная от неопределённого интеграла равна подинтегральной функции во всех точках непрерывности этой функции.*

В самом деле,

$$\frac{F(y+h)-F(y)}{h}=\frac{1}{h}\int\limits_{y}^{y+h} f(x)\,dx.$$

Обозначим через m_h и M_h соответственно нижнюю и верхнюю грани функции $f(x)$ в промежутке $y\leqslant x\leqslant y+h$ при $h>0$ и в промежутке $y+h\leqslant x\leqslant y$ при $h<0$.

Тогда

$$m_h<\frac{F(y+h)-F(y)}{h}<M_h$$

и, следовательно,

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(y+h)-F(y)}{h}=f(y),$$

что и требовалось доказать.

Измеримая функция может не быть суммируемой.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 8. Функция $f=\frac{1}{R^{n-\alpha}}$, где $R=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$ измерима в шаре $R<1$. В самом деле, если исключить из этого шара внутренность малого шарика, $R\leqslant\varepsilon$, в оставшейся части f будет непрерывна. Эта функция будет суммируема в случае $\alpha>0$. Для того, чтобы доказать это, заметим, что

$$\underset{\frac{1}{2^k}\leqslant R\leqslant 1}{\int\ldots\int}\frac{dx_1\ldots dx_n}{R^{n-\alpha}}=\sum_{m=0}^{k-1}\psi_m,$$

где

$$\psi_m=\underset{\frac{1}{2^{m+1}}\leqslant R\leqslant\frac{1}{2^m}}{\int\ldots\int}\frac{dx_1\ldots dx_n}{R^{n-\alpha}}.$$

Сделаем в ψ_m замену переменных $x_i=\frac{\xi_i}{2^m}$ $(i=1,\ldots,n)$. При этом

$$\psi_m=\frac{1}{2^{m\alpha}}\underset{\frac{1}{2}\leqslant\rho\leqslant 1}{\int\ldots\int}\frac{d\xi_1\ldots d\xi_n}{\left[\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2}\right]^{n-\alpha}}=\frac{1}{2^{m\alpha}}\psi_0,$$

где

$$\rho=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2},$$

откуда

$$\sum_{m=0}^{k-1}\psi_m\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^{m\alpha}}\psi_0=\psi_0\frac{2^\alpha}{2^\alpha-1},$$

что и требовалось доказать.

Пример 9. Функция $f=\frac{1}{r^{n-\alpha}}$, где $r=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$, измерима в $2n$-мерной области $0<x_i<1$; $0<y_i<1$ $(i=1,\ldots,n)$. Она будет суммируемой при $\alpha>1$.

В самом деле, если исключить из этого куба множество $r\leqslant\varepsilon$, то f в оставшейся части будет непрерывна. Объём исключённой области, как легко видеть, есть малая величина порядка ε^n. Суммируемость f при $\alpha>1$ устанавливается, как в прошлом примере.

Пример 10. Функция f в кубе v_0, $-1<x_i<1$ $(i=1,\ldots,n)$, принимающая значение единица в точках, все координаты которых рациональны, и нуль во всех остальных, суммируема.

Все рациональные точки могут быть перенумерованы числами натурального ряда.

Действительно, пусть координаты какой-либо положительной рациональной точки выражаются дробями

$$\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2},\ldots,\ \frac{p_n}{q_n}.$$

Выпишем подряд $2n$ целых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$. Каждой рациональной точке отвечает много таких комбинаций целых чисел, так как одно и то же рациональное число можно представить в виде различных сократимых дробей. Однако каждой комбинации $2n$ целых чисел отвечает только одна вполне определённая рациональная точка. Все такие комбинации можно перенумеровать подряд при помощи последовательности нечётных чисел. Для этого выпишем сначала целочисленные комбинации, сумма элементов которых равна нулю (их, очевидно, будет конечное число), затем единице, двум и так далее. Таким образом, все положительные рациональные точки будут занумерованы, причём каждой из них будет отвечать бесчисленное множество различных номеров. Для того чтобы сделать нумерацию взаимно однозначной, надо при последовательной нумерации точек выбрасывать уже занумерованные. Что касается отрицательных рациональных точек, то мы их включим в нумерацию при помощи последовательности чётных чисел.

Каждую из рациональных точек

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_k,\ \ldots$$

можно заключить внутрь некоторого эллипсоида Ω_k с центром в начале координат и с фокусом в данной точке так, что $m\Omega_k\leqslant\frac{1}{2^{k+t}}$.

Сумма $\Omega_0^{(t)}=\Omega_1+\ldots+\Omega_k+\ldots$ будет открытым множеством с мерой $\leqslant\frac{1}{2^t}$ и поэтому сколь угодно малой. Множество $F_t=v_0-\Omega_0^{(t)}$ имеет меру, сколь угодно близкую к мере v_0. На нём f непрерывна и равна нулю. F_t образуют исчерпывающую систему; значит,

$$\int\limits_{-1<x_i<1}\!\!\ldots\int f\,dv=0.$$

Нам часто придётся рассматривать функции, заданные в неограниченной области Ω.

Рассмотрим систему шаров $R<N$, и пусть Ω_N обозначает часть открытого множества Ω, лежащую внутри этого шара. Неотрицательную функ-

цию f мы будем называть измеримой в Ω, если она измерима в любом Ω_n, и суммируемой в Ω, если интегралы

$$\int\limits_{\Omega_N} f\,dv$$

ограничены. Тогда по определению

$$\int\limits_{\Omega} f\,dv = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\Omega_N} f\,dv.$$

Интегралы от знакопеременных функций определяются как обычно.

Для таких интегралов справедливы все обычные свойства, которые мы перечислим:

1. $\int\limits_{\Omega} (f_1+f_2)\,dv = \int\limits_{\Omega} f_1\,dv + \int\limits_{\Omega} f_2\,dv;$

2. $\int\limits_{\Omega} af\,dv = a\int\limits_{\Omega} f\,dv;$

3. $\left|\int\limits_{\Omega} \varphi f\,dv\right| \leqslant \max|\varphi| \int\limits_{\Omega} |f|\,dv,$

причём из существования правых частей этих соотношений вытекает и существование левых частей. Доказательство этих свойств получается очевидным образом путём предельного перехода.

Пример 11. Пусть $f=\frac{1}{R^{n+\alpha}}$; $R=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ в области $R>1$. Функция f, очевидно, измерима в Ω. Она будет суммируемой в Ω при $\alpha>0$.

В самом деле,

$$\int\limits_{R>1}\!\!\cdots\!\int \frac{dx_1\ldots dx_n}{R^{n+\alpha}} = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m,$$

где

$$\psi_m = \int\limits_{2^m<R<2^{m+1}}\!\!\cdots\!\int \frac{dx_1\ldots dx_n}{R^{n+\alpha}}.$$

Положим

$$x_i = 2^m \xi_i\ (i=1,\ldots,n) \quad \text{и} \quad \rho=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi^2};$$

тогда

$$\psi_m = \frac{1}{2^{m\alpha}} \int\limits_{1<\rho<2}\!\!\cdots\!\int \frac{d\xi_1\ldots d\xi_n}{\rho^{n+\alpha}} = \frac{1}{2^{m\alpha}}\psi_0,$$

или

$$\sum_{m=0}^{\infty} \psi_m = \frac{2^\alpha}{2^\alpha-1}\psi_0,$$

что и требовалось доказать.

Из примеров 8 и 11 следует, между прочим, что интегралы

$$\int_{R<\delta}\cdots\int \frac{dx_1\dots dx_n}{R^{n-\alpha}} \quad \text{и} \quad \int_{R>\frac{1}{\delta}}\cdots\int \frac{dx_1\dots dx_n}{R^{n+\alpha}}$$

стремятся к нулю при $\delta \to 0$.

§ 6. Измеримые множества. Теорема Егорова.

Имея в виду дальнейшее изучение свойств суммируемых функций, введём теперь понятие измеримого множества. Пусть Ω — ограниченное открытое множество, а E — какое-нибудь заключённое в нём точечное множество. Построим характеристическую функцию $\xi_E(P)$ для множества E, т. е. функцию, равную единице в точках E и нулю вне E.

Если функция $\xi_E(P)$ измерима (и, следовательно, суммируема ввиду ограниченности $\xi_E(P)$ и Ω), то множество E называется измеримым, а интеграл

$$\int_\Omega \xi_E(P)\,dv$$

называется мерой E и обозначается mE.

Нетрудно проверить, что в случаях, когда E — открытое или замкнутое множество, новое определение меры совпадает с ранее данным, ибо mE в этих случаях строится точно так же, как и раньше.

Если множество E измеримо, то и множество $\Omega - E$ измеримо. В самом деле, если измерима функция $\xi_E(P)$, то будет измеримой и функция $1 - \xi_E(P) \equiv \xi_{\Omega-E}(P)$. При этом

$$m(\Omega - E) = \int_\Omega [1 - \xi_E(P)]\,dv = m\Omega - mE.$$

Для любых двух измеримых множеств справедлива формула

$$\xi_{E_1}(P) + \xi_{E_2}(P) = \xi_{E_1+E_2}(P) + \xi_{E_1E_2}(P). \tag{VI.6}$$

Далее, $\xi_{E_1E_2} = \xi_{E_1}\xi_{E_2}$. Очевидно, $\xi_{E_1E_2}(P)$ измерима и, следовательно, измерима $\xi_{E_1+E_2}$. Мы видим, что сумма и пересечение двух измеримых множеств всегда измеримы.

Теорема 17. *Для того чтобы множество E, лежащее в открытом множестве Ω, было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность замкнутых множеств F_k, заключённых в E, и открытых множеств Ω_k, содержащих E, таких, что*

$$m(\Omega_k - F_k) \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Доказательство. Предположим, что функция $\xi_E(P)$ измерима. Тогда можно указать замкнутые множества F_k с мерой, сколь угодно близкой к $m\Omega$, на которых $\xi_E(P)$ непрерывна. Каждое такое множество F_k распадается на два подмножества без общих точек:

$$F_k = F_k^{(1)} + F_k^{(2)},$$

где $F_k^{(1)} = F_k E$, $F_k^{(2)} = F_k - E$. На $F_k^{(1)}$ функция $\xi_E(P)$ равна 1, а на $F_k^{(2)}$ она равна нулю.

Каждое из множеств, как легко видеть, будет замкнутым. В самом деле, предельная точка для последовательности точек P_n из $F_k^{(1)}$ есть точка множества F_k и, следовательно, принадлежит одному из множеств $F_k^{(1)}$ или $F_k^{(2)}$. Однако она не может принадлежать $F_k^{(2)}$, так как в этой точке функция $\xi_E(P)$ была бы разрывна на F_k, что противоречит выбору F_k. Таким же образом доказывается замкнутость $F_k^{(2)}$.

Мы имеем по условию

$$mF_k = mF_k^{(1)} + mF_k^{(2)} > m\Omega - \delta_k,$$

где $\delta_k \to 0$. Отсюда

$$mF_k^{(1)} + m\Omega - m\left(\Omega - F_k^{(2)}\right) > m\Omega - \delta_k$$

, или

$$m\left(\Omega - F_k^{(2)}\right) - mF_k^{(1)} < \delta_k.$$

Множества $F_k^{(1)}$ и $\left(\Omega - F_k^{(2)}\right)$ и суть те множества, существование которых утверждает теорема.

Обратно, пусть существуют множества F_k и Ω_k, обладающие указанным в теореме свойством. Мы можем всегда заменить множества Ω_k на множества Ω_k^{**} такие, что множества $\Omega - \Omega_k^{**}$ будут замкнутыми. Для этого присоединим к множеству Ω_k множество $\Omega^*_{\frac{1}{k}}$, состоящее из тех точек множества Ω, расстояние которых от границы C множества Ω меньше $\frac{1}{k}$. Очевидно, $m\Omega_{\frac{1}{k}} \to 0$ при $k \to \infty$ и поэтому, если положить $\Omega_k^{**} = \Omega_k + \Omega^*_{\frac{1}{k}}$, то разность $m\Omega_k^{**} - mF_k$ будет попрежнему сколь угодно мала при достаточно большом k. Множество $\Omega - \Omega_k^{**}$ будет замкнутым, как разность между замкнутым множеством $\Omega + C$ и открытым множеством $\Omega_k + \Omega^*_{\frac{1}{k}}$.

Легко убеждаемся, что функция $\xi_E(P)$ непрерывна на F_k и на $\Omega - \Omega_k^{**}$. Следовательно, она непрерывна на множестве $F_k + \left(\Omega - \Omega_k^{**}\right)$, так как функция, непрерывная на двух замкнутых множествах, не имеющих общих точек, непрерывна на сумме этих множеств. Оценим меру этого множества, обозначив его Φ_k. Очевидно,

$$\Phi_k \equiv F_k + (\Omega - \Omega_k^{**}) = \Omega - (\Omega_k^{**} - F_k).$$

Далее,

$$m\Omega = m\,[\Phi_k + \Omega_k^{**} - F_k] \leqslant m\Phi_k + m\,(\Omega_k^{**} - F_k).$$

Следовательно,

$$m\Phi_k \geqslant m\Omega - \delta_k, \qquad \text{где} \qquad \delta_k \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Таким образом, $\xi_E(P)$ непрерывна на замкнутых множествах Φ_k с мерой, сколь угодно близкой к мере Ω, и, следовательно, измерима, что и требовалось доказать.

Нетрудно доказать, что если множество E измеримо, то

$$mE = \sup_F mF = \inf_\Omega m\Omega,$$

где F — замкнутые множества, содержащиеся в E, а Ω — открытые множества, содержащие E.

Пусть f — суммируемая функция в Ω, а E — измеримое множество. Определим интеграл от f по множеству E формулой

$$\int_E f\,dv = \int_\Omega \xi_E(P) f(P)\,dv.$$

Легко видеть, что это определение не зависит от выбора открытого множества Ω, содержащего множество E. Если множество E заключить в какое-нибудь другое открытое множество, величина интеграла останется прежней.

Это определение равносильно прежнему для тех случаев, когда $E = F$ есть замкнутое множество, на котором функция непрерывна, и когда $E = \Omega$ есть открытое множество, где функция непрерывна. В самом деле, пусть $F_\delta^{(1)}$, $F_\delta^{(2)}$ — замкнутые множества без общих точек, на которых $\xi_E(P)$ непрерывна и принимает соответственно значения нуль или единица, причём

$$mF_\delta^{(1)} + mF_\delta^{(2)} > m\Omega - \delta, \quad \delta \to 0.$$

Существование таких множеств установлено при доказательстве теоремы 17. Если $E = F$ — замкнутое множество и f непрерывна на F, то за множество $F_\delta^{(1)}$ можно взять само множество F. Тогда на основании теоремы

$$\int_\Omega \xi_E(P) f(P)\,dv = \lim_{\delta\to 0} \int_{F_\delta^{(1)}+F_\delta^{(2)}} \xi_E(P) f(P)\,dv = \int_F \xi_E(P) f(P)\,dv = \int_F f\,dv.$$

Если $E = \Omega_0$ — открытое множество и Φ_δ — система исчерпывающих множеств для f в Ω_0, то множества $F_\delta^{(1)}$ можно заменить на Φ_δ, ибо

$$[\Omega - (\Phi_\delta + F_\delta^{(2)})] \subseteq [\Omega - (F_\delta^{(1)} + F_\delta^{(2)})] + (\Omega_0 - \Phi_\delta)$$

и, значит,

$$m\,[\Omega - (\Phi_\delta + F_\delta^{(2)})] \leqslant m\,[\Omega - (F_\delta^{(1)} + F_\delta^{(2)})] + m\,(\Omega_0 - \Phi_\delta) \leqslant 2\delta.$$

Таким образом, $\Phi_\delta + F_\delta^{(2)}$ будет исчерпывающей системой для функции $\xi_E(P) f(P)$. Отсюда

$$\int_\Omega \xi_E(P) f(P)\,dv = \lim_{\delta\to 0} \int_{\Phi_\delta + F_\delta^{(2)}} \xi_E(P) f(P)\,dv =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{\Phi_\delta} \xi_E(P) f(P)\,dv = \lim_{\delta\to 0} \int_{\Phi_\delta} f(P)\,dv = \int_{\Omega_0} f\,dv,$$

что и требовалось доказать.

В силу формулы (VI.6) имеем

$$\int_{E_1} f\,dv + \int_{E_2} f\,dv = \int_{E_1+E_2} f\,dv + \int_{E_1E_2} f\,dv.$$

В частности, для $f=1$ получим равенство

$$mE_1 + mE_2 = m(E_1+E_2) + m(E_1E_2).$$

Если для некоторого множества E существуют такие содержащие его открытые множества Ω_k, что $\inf m\,\Omega_k = 0$, то согласно сказанному выше $mE=0$. Обратно, всякое множество меры нуль может быть заключено в открытое множество сколь угодно малой меры.

Теорема 18. *Если функция f отлична от нуля лишь на множестве E меры нуль, то интеграл этой функции по открытому множеству Ω равен нулю.* В самом деле, пусть F_k — исчерпывающая система замкнутых множеств для f, а Ω_k — система открытых множеств с мерой, стремящейся к нулю, содержащих E. Мера замкнутых множеств $\Phi_k = F_k - \Omega_k$ будет стремиться к мере Ω, так как $\Omega - \Phi_k = (\Omega - F_k) + \Omega_k$; отсюда $m(\Omega - \Phi_k) \leqslant m(\Omega - F_k) + m\Omega_k \to 0$. Таким образом, система замкнутых множеств Φ_k будет исчерпывающей. Утверждение теоремы следует из того, что для этой системы все интегралы

$$\int_{\Phi_k} f\,dv$$

равны нулю.

Если две суммируемые функции f_1 и f_2 отличаются одна от другой лишь на множестве точек меры нуль, то

$$\int_{\Omega} f_1\,dv = \int_{\Omega} f_2\,dv.$$

В самом деле,

$$\left|\int_{\Omega} f_1\,dv - \int_{\Omega} f_2\,dv\right| = \left|\int_{\Omega} (f_1-f_2)\,dv\right| \leqslant \int_{\Omega} |f_1-f_2|\,dv.$$

Мы будем говорить, что некоторое утверждение имеет место почти всюду или почти везде, если оно имеет место для всех точек, кроме, быть может, точек некоторого множества E меры нуль. Как было показано выше, если две функции совпадают почти везде, то интегралы от них равны и равен нулю интеграл от модуля их разности. Такие функции мы будем называть эквивалентными.

Рассмотрим ещё один вопрос, важный для дальнейшего. Пусть E — некоторое измеримое ограниченное множество, и пусть $F^{(1)}$ — расширяющаяся система замкнутых множеств, принадлежащих множеству E:

$$F_1^{(1)} \subseteq F_2^{(1)} \subseteq F_3^{(1)} \subseteq \ldots \subseteq F_k^{(1)} \subseteq \ldots$$

Систему $F^{(2)}$, состоящую из множеств

$$F_1^{(2)} \subseteq F_2^{(2)} \subseteq F_3^{(2)} \subseteq \ldots \subseteq F_k^{(2)} \subseteq \ldots,$$

мы назовём внутренней по отношению к $F^{(1)}$, если для любого $F_k^{(2)}$ можно указать такое множество $F_{n_k}^{(1)}$, что $F_k^{(2)} \subseteq F_{n_k}^{(1)}$.

Условимся при этом писать:

$$F^{(2)} \ll F^{(1)} \quad \text{или} \quad F^{(1)} \gg F^{(2)},$$

(Соотношение $F^{(1)} \gg F^{(2)}$ не исключает $F^{(1)} \ll F^{(2)}$.) Из $F^{(1)} \gg F^{(2)}$ и $F^{(2)} \gg F^{(3)}$ следует $F^{(1)} \gg F^{(3)}$.

Лемма 7. *Пусть дана последовательность расширяющихся систем замкнутых множеств на множестве E:*

$$F^{(1)} \gg F^{(2)} \gg F^{(3)} \gg \ldots F^{(S)} \gg \ldots$$

и таких, что $\lim\limits_{k\to\infty} (mE - mF_k^{(S)}) = 0$.

Тогда существует система $F^{(\omega)}$, внутренняя по отношению ко всем $F^{(S)}$ и такая, что опять $\lim\limits_{k\to\infty} (mE - mF_k^{(\omega)}) = 0$.

Докажем эту лемму.

В каждой системе $F^{(S)}$ выберем такое множество $F_n^{(S)} = F^{(S)*}$, что:

$$mF_n^{(S)} \geqslant mE - \frac{1}{2^S}.$$

Пусть

$$F_k^{(\omega)} = F^{(k)*}\, F^{(k+1)*} \ldots F^{(m)*} \ldots$$

Очевидно, что

$$F_1^{(\omega)} \subseteq F_2^{(\omega)} \subseteq \ldots \subseteq F_k^{(\omega)} \subseteq \ldots$$

Множества $F_k^{(\omega)}$ суть замкнутые множества.

Нетрудно видеть, что система $F^{(\omega)}$ является внутренней по отношению к любой из систем $F^{(S)}$. Это следует из того, что $F_k^{(\omega)} \subseteq F^{(S)*}$ для любого $S \geqslant k$.

Остаётся показать, что $\lim\limits_{k\to\infty} mF_k^{(\omega)} = mE$. Имеем

$$mE - mF_k^{(\omega)} \leqslant m(E - F^{(k)*}) + m(E - F^{(k+1)*}) + \ldots + m(E - F^{(k+m)*}) + \ldots$$
$$\ldots \leqslant \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \ldots = \frac{1}{2^{k-1}},$$

откуда и следует наше утверждение. Лемма доказана.

Следствием этой важной леммы является

Теорема 19. *Последовательность функций $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$, непрерывных на замкнутом множестве F, сходящаяся всюду на F, сходится равномерно на системе замкнутых множеств F_δ, таких, что*

$$\lim_{\delta\to 0} mF_\delta = mF.$$

Для доказательства этой теоремы рассмотрим замкнутые множества $F_k(\varepsilon)$, обладающие тем свойством, что на них

$$|f_{m_1} - f_{m_2}| \leqslant \varepsilon$$

для любых $m_1 > k$ и $m_2 > k$.

Каково бы ни было ε, каждая точка F принадлежит хотя бы одному $F_k(\varepsilon)$. Следовательно,

$$F = F_1(\varepsilon) + \ldots + F_k(\varepsilon) + \ldots$$

Кроме того, $F_1(\varepsilon) \subseteq F_2(\varepsilon) \subseteq \ldots \subseteq F_k(\varepsilon) \subseteq \ldots$

Применяя теорему 10 (VI), будем иметь

$$\lim_{k\to\infty} mF_k(\varepsilon) = mF.$$

Рассмотрим последовательность систем $F^{(S)}$, состоящих из $F_1\left(\frac{1}{2^S}\right)$, $F_2\left(\frac{1}{2^S}\right), \ldots$

Очевидно,

$$F^{(1)} \gg F^{(2)} \gg \ldots$$

Применяя лемму 7, убеждаемся в существовании системы $F^{(\omega)}$, внутренней по отношению ко всем $F^{(S)}$. На любом множестве $F_k^{(\omega)}$ последовательность $f_1, f_2, \ldots$ сходится равномерно.

В самом деле, $F_k^{(\omega)}$ лежит внутри некоторого $F_{n_S}^{(S)}$ для любого (S), и, значит, мы получим:

$$|f_{m_1} - f_{m_2}| < \frac{1}{2^S} \quad \text{при} \quad m_1 > n_S,\ m_2 > n_S.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы непосредственно следует основной факт теории измеримых функций.

Теорема Егорова. *Сходящаяся почти всюду последовательность измеримых в ограниченном открытом множестве Ω функций f_1, $f_2, \ldots, f_k, \ldots$ имеет своим пределом измеримую функцию.*

Действительно, выделим замкнутые множества F_k, на которых f_k непрерывна, так, чтобы иметь

$$m\Omega - mF_k \leqslant \frac{\delta}{2^{k+1}}.$$

На множестве

$$F_0 = F_1F_2 \ldots F_k \ldots$$

все функции $f_1, f_2, \ldots$ непрерывны.

Подсчитаем меру F_0.

Мы имеем

$$mF_0 = \lim_{k\to\infty} mF_1F_2 \ldots F_k,$$

$$mF_1 - mF_1F_2 = m(F_1 + F_2) - mF_2 \leqslant m\Omega - mF_2 \leqslant \frac{\delta}{2^3},$$

$$mF_1F_2 - mF_1F_2F_3 = m(F_1F_2 + F_3) - mF_3 \leqslant m\Omega - mF_3 \leqslant \frac{\delta}{2^4} \text{ и т. д.,}$$

откуда

$$mF_1F_2 \ldots F_k \geqslant mF_1 - \frac{\delta}{4} = m\Omega - (m\Omega - mF_1) - \frac{\delta}{4} \geqslant m\Omega - \frac{\delta}{2}$$

и, следовательно,

$$mF_0 \geqslant m\Omega - \frac{\delta}{2}.$$

Из сходимости $f_1, \ldots, f_k, \ldots$ почти всюду следует существование замкнутых множеств F_δ таких, что $mF_\delta \geqslant m\Omega - \frac{\delta}{2}$, на которых она сходится. Тогда $F_\delta^* = F_0 F_\delta$ обладает свойством

$$mF_\delta^* \geqslant m\Omega - \delta.$$

На основании теоремы 19 последовательность $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ сходится равномерно на множестве $F_\delta' \subseteq F_\delta^*$, таком, что

$$mF_\delta^* - mF_\delta' < \delta$$

и, значит, $mF_\delta' \geqslant m\Omega - 2\delta$ и, следовательно,

$$f_0 = \lim_{k \to \infty} f_k$$

непрерывна на множестве F_δ' с мерой, сколь угодно близкой к $m\Omega$, и является измеримой, что и требовалось доказать.

Пользуясь теоремой 19, можно доказать следующую важную лемму.

Лемма 8. *Если неубывающая последовательность суммируемых функций $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ в области Ω обладает тем свойством, что*

$$\int_\Omega f_k\,dv \leqslant A,$$

т. е. если интегралы от её членов остаются ограниченными, то последовательность $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ имеет почти всюду своим пределом суммируемую функцию

$$\lim_{k \to \infty} f_k = f_0$$

и, кроме того,

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Omega f_k\,dv = \int_\Omega f_0\,dv.$$

Лемма будет доказана, если мы установим существование таких замкнутых множеств F_δ^*, на которых все f_k непрерывны, последовательность f_k равномерно сходится, и притом $m(\Omega - F_\delta^*) < \delta$, где δ—любое положительное число.

В самом деле, при этом предельная функция f_0 будет непрерывна на всех множествах F_δ^* и будет выполнено неравенство

$$\int_{F_\delta^*} f_0\,dv \leqslant A.$$

На основании леммы 4, f_0 будет измеримой и суммируемой функцией. Замкнутые множества F_δ^* образуют исчерпывающую систему для f_0 и поэтому

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{F_\delta^*} f_0\,dv = \int_\Omega f_0\,dv \leqslant A.$$

Наконец, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, при достаточно большом k будем иметь

$$\int_{F_\delta^*} f_k\,dv \leqslant \int_{F_\delta^*} f_0\,dv \leqslant \int_{F_\delta^*} f_k\,dv + \varepsilon,$$

и, следовательно,

$$\int_\Omega f_k\,dv \leqslant \int_\Omega f_0\,dv \leqslant \int_\Omega f_k\,dv + \varepsilon.$$

Значит,

$$\int_\Omega f_0\,dv = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k\,dv,$$

что и требовалось доказать. Докажем существование множеств, обладающих указанным свойством. Рассмотрим сначала случай, когда $f_k \geqslant 0$.

Введём в рассмотрение функции

$$\psi_k = \operatorname{arctg} f_k.$$

Очевидно, ψ_k будет неубывающей ограниченной последовательностью. Поэтому ψ_k сходится всюду на Ω.

Обозначим

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k = \psi_0.$$

Из рассуждений, приведённых при доказательстве теоремы Егорова, мы видим, что существуют замкнутые множества F_δ

$$m\Omega - mF_\delta < \delta,$$

на которых сходимость равномерная и ψ_0 непрерывна.

Пусть F'_δ — замкнутое множество тех точек F_δ, для которых $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$. На F'_δ функция ψ_k равномерно стремится к $\frac{\pi}{2}$ и, значит, $f_k = \operatorname{tg}\psi_k$ равномерно стремится к ∞. Следовательно,

$$mF'_\delta = 0,$$

иначе мы имели бы

$$\int_{F'_\delta} f_k\,dv \to \infty,$$

что, очевидно, невозможно.

Заключив F'_δ в область Ω_δ, такую, что

$$m\Omega_\delta < \delta,$$

положим

$$F_\delta^* = \Omega_\delta - F_\delta.$$

Очевидно,

$$mF_\delta^* > m\Omega - 2\delta.$$

На множествах F_δ^* последовательность ψ_k равномерно сходится к пределу, отличному от $\frac{\pi}{2}$, и, значит, f_k равномерно сходится к конечному пределу.

Лемма доказана.

Если f_k — знакопеременная функция, то достаточно рассмотреть последовательность

$$\varphi_k = f_k - f_1,$$

и доказательство сводится к предыдущему.

§ 7. Сходимость в среднем суммируемых функций.

В качестве примеров на применение доказанных выше теорем приведём несколько предложений о свойствах меры.

Теорема 20. *Пусть на открытом множестве Ω задана последовательность измеримых множеств $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$, не имеющих попарно общих точек. Тогда сумма этих множеств*

$$E_0 = E_1 + E_2 + \ldots + E_k + \ldots$$

измерима и

$$mE_0 = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i.$$

Действительно, пусть $\xi_i(P)$ есть характеристическая функция множества E_i. Положим

$$\psi_s = \sum_{i=1}^{s} \xi_i(P).$$

Каждая из функций ψ_s суммируема по теореме 13, как сумма конечного числа суммируемых функций. Последовательность ψ_s является неубывающей последовательностью, которая сходится к характеристической функции множества E_0, т. е. к $\xi_0(P)$. Кроме того, $\psi_s \leqslant 1$, так как множества не имеют общих точек и, следовательно, не может быть двух функций $\xi_i(P)$, отличных от нуля в какой-либо точке. На основании только что доказанной леммы функция $\xi_0(P) = \lim\limits_{s\to\infty} \psi_s$ суммируема и

$$\int_\Omega \xi_0(P)\,dv = \lim_{s\to\infty} \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{s} \xi_k(P)\right) dv = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega \xi_k(P)\,dv.$$

Отсюда и следует наша теорема.

Следствие 1. *Если $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ — произвольная последовательность измеримых множеств и*

$$E_0 = E_1 + E_2 + \ldots + E_k + \ldots,$$

то E измеримо и

$$mE_0 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} mE_k.$$

Действительно, множество E_0 можно представить в виде

$$E_1 + (E_2 - E_1) + [E_3 - (E_1 + E_2)] + \ldots$$
$$\ldots + [E_k - (E_1 + E_2 + \ldots + E_{k-1})] + \ldots$$

Каждое из слагаемых, очевидно, измеримо, все они попарно не имеют общих точек и

$$m[E_k - (E_1 + E_2 + \ldots + E_{k-1})] \leqslant mE_k.$$

Отсюда и вытекает наше утверждение.

Следствие 2. *Сумма последовательности множеств меры нуль*

$$E_0 = E_1 + E_2 + \ldots + E_k + \ldots, \qquad mE_k = 0,$$

является также множеством меры нуль.

Следствие 2 непосредственно вытекает из следствия 1.

Мы доказали выше, что если функция f обращается в нуль почти всюду, то интеграл от неё равен нулю. Сейчас мы докажем теорему, в некотором смысле обратную для этого утверждения.

Теорема 21. *Если интеграл от неотрицательной суммируемой функции f по ограниченному открытому множеству равен нулю, то функция f равна нулю везде, кроме, быть может, некоторого множества точек E меры нуль.*

Для доказательства рассмотрим расширяющуюся систему замкнутых множеств F_k, на которых функция f непрерывна, причём $m(\Omega - F_k) < \frac{1}{2^k}$. Множество точек E_0, принадлежащих открытому множеству Ω, которые не войдут ни в одно из множеств F_k, имеет меру нуль, так как оно может быть заключено в семейство открытых множеств $\Omega - F_k$, мера которых стремится к нулю при $k \to \infty$.

Множество Φ_k тех точек множества F_k, где $f \geqslant \frac{1}{2^k}$, есть, очевидно, замкнутое множество. По условию теоремы

$$\int_{\Phi_k} f\,dv = 0,$$

откуда следует $m\Phi_k = 0$. Положим $E = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k$. Множества Φ_k образуют расширяющуюся последовательность. Всякая точка, в которой $f > 0$, должна войти или в E_0, или в одно из множеств Φ_k, т. е. будет принадлежать множеству E. По доказанному выше $mE = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 22. *Если функция f суммируема в открытом множестве Ω и если при любой непрерывной в Ω функции ψ имеет место равенство*

$$\int_{\Omega} f\psi\,dv = 0,$$

то функция f удовлетворяет условию

$$\int_{\Omega} |f|\,dv = 0$$

и, следовательно, равна нулю почти всюду.

Докажем эту теорему приведением к нелепости. Если бы интеграл $\int_{\Omega} |f|\,dv$ был отличен от нуля, то по крайней мере один из интегралов

$$\int_{\Omega} f^+\,dv, \qquad \int_{\Omega} f^-\,dv,$$

сумма которых равна $\int\limits_{\Omega} |f|\,dv$, был бы отличен от нуля. Разность этих интегралов равна нулю, ибо она равна интегралу от f. Следовательно, оба интеграла должны быть отличны от нуля. Тогда существует замкнутое множество F', на котором $f^+ > 0$ и, следовательно, $f = f^+$, причём для этого множества

$$\int\limits_{F'} f^+\,dv = \int\limits_{F'} f\,dv = h > 0.$$

Этот интеграл может быть записан в виде

$$\int\limits_{\Omega} f(P)\,\xi_{F'}(P)\,dv,$$

где $\xi_{F'}(P)$ — характеристическая функция множества F'. По лемме 3 и замечанию на стр. 94 существует непрерывная функция $\chi_k(P)$, значения которой заключены между нулём и единицей:

$$0 \leqslant \chi_k(P) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \chi_k(P) - \xi_{F'}(P) \leqslant 1,$$

и которая может отличаться от $\xi_{F'}(P)$ только на множестве Ω_k сколь угодно малой меры. При этом

$$\int\limits_{\Omega} f(P)\,\xi_{F'}(P)\,dv = \int\limits_{\Omega} f(P)\,\chi_k(P)\,dv + \int\limits_{\Omega} f(P)\,[\xi_{F'}(P) - \chi_k(P)]\,dv.$$

Но по условию теоремы первый интеграл в правой части равен нулю ввиду непрерывности $\chi_k(P)$. Пользуясь ещё теоремой 15, получим:

$$\left|\int\limits_{\Omega} f(P)\,[\xi_{F'}(P) - \chi_k(P)]\,dv\right| \leqslant \int\limits_{\Omega_k} |f(P)|\,dv.$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла от $|f(P)|$ последний интеграл становится сколь угодно малым вместе с мерой Ω_k и, следовательно, не может равняться постоянному числу $h > 0$. Получилась нелепость, опровергающая наше предположение. Теорема доказана.

Лемма 9. *Любая непрерывная в открытом множестве Ω функция $\psi(P)$, отличная от нуля лишь в открытом множестве Ω_ψ, лежащем внутри Ω вместе с границей, может быть со сколь угодно большой точностью приближена с помощью функции $\psi_h(P)$, имеющей непрерывные производные любого порядка и отличной от нуля лишь в открытом множестве Ω_h, состоящем из точек, расстояние которых до Ω_ψ меньше h.* Здесь h — достаточно малое положительное число, зависящее от желаемой степени точности приближения и от конфигурации Ω и Ω_ψ.

Построим функцию $\psi_h(P)$ по формуле

$$\psi_h(P) = \frac{\int\limits_{r \leqslant h} e^{\frac{r^2}{r^2 - h^2}}\,\psi(P')\,dP'}{\int\limits_{r \leqslant h} e^{\frac{r^2}{r^2 - h^2}}\,dP},$$

где

$$r = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + \ldots + (x_n - x_n')^2}.$$

Функция $\psi_h(P)$ неограниченно дифференцируема. В самом деле, обозначим

$$\int\limits_{r\leqslant h} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}\,dP' = \varkappa(h)$$

и определим функцию $\omega(P, P')$ соотношениями

$$\omega(P, P') = \begin{cases} 0; & r > h \\ \dfrac{1}{\varkappa(h)}\, e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}; & r \leqslant h. \end{cases}$$

Функция $\psi_h(P)$ может быть записана в виде

$$\psi_h(P) = \int\limits_{\Omega} \psi(P')\,\omega(P, P')\,dP'.$$

В таком виде к ней применима теорема о дифференцировании по параметру под знаком интеграла.

В самом деле, функция $\omega(P, P')$ имеет непрерывные производные любого порядка по координатам точки P. Производные любого порядка от $\omega(P, P')$, очевидно, существуют при $r < h$ и при $r > h$. Их предельные значения при $r > h$ и $r \to h$ будут все равны нулю. Нам нужно установить, что и предельные значения всех производных от ω при $r < h$, $r \to h$ тоже будут равны нулю. Это следует из того, что любая производная от ω порядка s будет иметь вид:

$$\frac{\partial^s \omega}{\partial x_1^{a_1} \ldots \partial x_n^{a_n}} = \frac{e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}}{(r^2-h^2)^s}\, Q(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n'),$$

где Q — многочлен от своих аргументов. Но $e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}$ стремится к нулю быстрее, чем $\frac{1}{(r^2-h^2)^s}$ идёт к бесконечности, и, значит,

$$\lim_{r\to h} \frac{\partial^s \omega}{\partial x_1^{a_1} \ldots \partial x_n^{a_n}} = 0.$$

Для разности $\psi_h(P) - \psi(P)$ имеем:

$$\psi_h(P) - \psi(P) = \frac{\int\limits_{r\leqslant h} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}} [\psi(P') - \psi(P)]\,dP'}{\int\limits_{r\leqslant h} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}\,dP'}.$$

При достаточно малом h

$$|\psi(P') - \psi(P)| < \varepsilon,$$

откуда по теореме о среднем

$$|\psi_h(P) - \psi(P)| < \varepsilon.$$

Лемма доказана

Эта лемма позволяет пользоваться интегральным признаком обращения функции в нуль в несколько ослабленной форме [см. § 4 (VI)]. Пусть f суммируема в Ω. Положим, что

$$\int_{\Omega} f(P)\,\psi(P)\,dP = 0 \qquad \text{(VI.7)}$$

для всех функций $\psi(P)$, имеющих непрерывные производные любого порядка и отличных от нуля каждая только в некоторой внутренней подобласти Ω_ψ области Ω.

Этого достаточно для того, чтобы утверждать, что

$$\int_{\Omega} |f(P)|\,dP = 0.$$

В самом деле, если условие (VI.7) выполнено для всех неограниченно дифференцируемых функций, то оно выполнено и для всех непрерывных функций. Предположим противное. Тогда существует функция $\psi_0(P)$, такая, что

$$\int_{\Omega} f(P)\,\psi_0(P)\,dP > \varepsilon.$$

В силу леммы существуют функции $\psi_h(P)$, сколь угодно близкие к ψ_0 и дифференцируемые неограниченно. Имеем:

$$\int_{\Omega} f(P)\,\psi_0(P)\,dP = \int_{\Omega} f(P)\,\psi_h(P)\,dP + \int_{\Omega} f(P)\,[\psi_0(P) - \psi_h(P)]\,dP.$$

По условию первое слагаемое равно нулю. С другой стороны,

$$\left|\int_{\Omega} f(P)\,[\psi_0(P) - \psi_h(P)]\,dP\right| \leqslant \max|\psi_0(P) - \psi_h(P)| \int_{\Omega} |f(P)|\,dP < \varepsilon,$$

где ε — произвольное положительное число. Мы пришли к противоречию, доказывающему наше утверждение.

Для доказательства важной теоремы 23 нам потребуется следующая

Лемма о наибольшем и наименьшем пределах последовательности. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ есть какая-то ограниченная последовательность вещественных чисел. Наибольшим пределом последовательности $\{x_k\}$ называется такое число Y, что при любом $\varepsilon > 0$ среди чисел $\{x_k\}$ найдётся лишь конечное таких, для которых выполнено неравенство

$$x_k > Y + \varepsilon,$$

и бесконечное множество таких, для которых

$$x_k > Y - \varepsilon.$$

Наименьшим пределом последовательности называется такое число y, что неравенство

$$x_k < y - \varepsilon$$

выполняется лишь для конечного числа x_k, а неравенство

$$x_k < y + \varepsilon$$

имеет место для бесконечного множества чисел x_k. Если наибольший и наименьший пределы совпадают, то, очевидно, последовательность сходится и имеет только одну предельную точку. Принято обозначать

$$Y = \overline{\lim}\, x_k, \qquad y = \underline{\lim}\, x_k.$$

Справедливы следующие формулы:

$$\overline{\lim}\, x_k = \lim_{j \to \infty} \left\{ \lim_{s \to \infty} \max(x_j, \ldots, x_{j+s}) \right\}, \tag{VI.8}$$

$$\underline{\lim}\, x_k = \lim_{j \to \infty} \left\{ \lim_{s \to \infty} \min(x_j, \ldots, x_{j+s}) \right\}. \tag{VI.9}$$

В правых частях (VI.8) и (VI.9) оба предела имеют смысл. В самом деле, при возрастании s величины

$$z_s^{(j)} = \max(x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+s})$$

не убывают, оставаясь ограниченными, и, следовательно, стремятся к некоторым пределам, которые мы обозначим $z_0^{(j)}$. Величины $z_0^{(j)}$ ограничены снизу и не возрастают с увеличением j, так как $z_s^{(j)} \leqslant z_s^{(j-1)}$ и, следовательно,

$$z_0^{(j)} = \lim_{s \to \infty} z_s^{(j)} \leqslant \lim_{s \to \infty} z_s^{(j-1)} = z_0^{(j-1)}.$$

Отсюда вытекает существование предела $\lim\limits_{j \to \infty} z_0^{(j)}$.

Докажем теперь справедливость формулы (VI.8). Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, бесконечное множество чисел $z_s^{(j)}$ будет удовлетворять условию

$$z_s^{(j)} > \overline{\lim}\, x_k - \varepsilon$$

и, следовательно,

$$z_0^{(j)} \geqslant \overline{\lim}\, x_k.$$

С другой стороны, при достаточно большом j все $z_s^{(j)}$ будут удовлетворять неравенству

$$z_s^{(j)} < \overline{\lim}\, x_k + \varepsilon.$$

Значит,

$$z_0^{(j)} \leqslant \overline{\lim}\, x_k + \varepsilon,$$

откуда и вытекает правильность формулы (VI.8). Аналогично может быть доказана формула (VI.9) для нижнего предела, которая, впрочем, сводится к формуле (VI.8) заменой x_k на $-x_k$.

Пусть дана последовательность суммируемых в открытом множестве Ω функций $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ Если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что при $m, n > N(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\int_\Omega |f_m - f_n|\, dv < \varepsilon,$$

то последовательность $\{f_k\}$ называется сходящейся в себе. Справедлива

Теорема 23. *Для всякой сходящейся в себе последовательности* $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ *существует суммируемая функция* f_0, *называемая обобщённым пределом последовательности* $\{f_k\}$ *и обладающая свойством*:

$$\int_{\Omega} |f_k - f_0|\, dv \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Доказательству этой теоремы мы предпошлём небольшое замечание. Пусть f_1, f_2 — суммируемые функции. Тогда функция

$$f_3 = \max(f_1, f_2)$$

также является суммируемой. В самом деле,

$$\max(f_1, f_2) = f_1 + (f_2 - f_1)^+.$$

Но из суммируемости f_2 и f_1 следует суммируемость их разности $f_2 - f_1$ и положительной части этой разности. Очевидно, что функция

$$\max(f_1, f_2, \ldots, f_m),$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_m$ — суммируемые функции, также является суммируемой.

Докажем теперь теорему 23. Рассмотрим подпоследовательность $\{f_{N_k}\}$, выбранную из последовательности $\{f_k\}$ таким образом, что

$$\int_{\Omega} |f_{N_k} - f_{N_{k_1}}|\, dv < \frac{1}{2^k} \quad \text{при} \quad k_1 > k.$$

Обозначим f_{N_k} через ψ_k. Докажем, что последовательность ψ_k почти всюду сходится к некоторой суммируемой функции f_0. С этой целью изучим $\overline{\lim}\, \psi_k$ и $\underline{\lim}\, \psi_k$. Пусть

$$\chi_s^{(j)} = \max(\psi_j, \psi_{j+1}, \ldots, \psi_{j+s}).$$

Зафиксируем пока j и рассмотрим последовательность

$$\chi_1^{(j)}, \chi_2^{(j)}, \ldots, \chi_s^{(j)}, \ldots$$

Она является неубывающей последовательностью суммируемых функций. С другой стороны,

$$\psi_j \leqslant \chi_s^{(j)} \leqslant \psi_j + |\psi_{j+1} - \psi_j| + |\psi_{j+2} - \psi_{j+1}| + \ldots + |\psi_{j+s} - \psi_{j+s-1}|,$$

и, значит,

$$0 \leqslant \int_{\Omega} \chi_s^{(j)}\, dv - \int_{\Omega} \psi_j\, dv \leqslant \int_{\Omega} \left\{ \sum_{k=j+1}^{j+s} |\psi_k - \psi_{k-1}| \right\} dv \leqslant \sum_{k=j}^{j+s-1} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^{j-1}}.$$

Следовательно, на основании леммы 8 последовательность $\{\chi_s^{(j)}\}$ имеет почти везде своим пределом некоторую суммируемую функцию $\chi_0^{(j)}$, причём $\chi_0^{(j)} \geqslant \psi_j$ и

$$0 \leqslant \int_{\Omega} \chi_0^{(j)}\, dv - \int_{\Omega} \psi_j\, dv \leqslant \frac{1}{2^{j-1}}.$$

Рассмотрим теперь последовательность $\chi_0^{(1)}, \chi_0^{(2)}, \ldots, \chi_0^{(k)}, \ldots$ Она будет невозрастающей, ибо $\chi_s^{(j)} \leqslant \chi_s^{(j-1)}$, откуда $\chi_0^{(j)} \leqslant \chi_0^{(j-1)}$. Интегралы от ψ_j равномерно ограничены снизу, так как

$$\int\limits_\Omega \psi_j\,dv \geqslant \int\limits_\Omega \psi_0\,dv - \sum_{k=1}^{j} \int\limits_\Omega |\psi_k - \psi_{k-1}|\,dv \geqslant \int\limits_\Omega \psi_0\,dv - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \int\limits_\Omega \psi_0\,dv - 1.$$

Следовательно, ограничены снизу интегралы от $\chi_0^{(j)}$. В силу той же леммы 8 последовательность $\chi_0^{(j)}$ почти всюду сходится к некоторой предельной функции f_0 и при этом

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_\Omega \chi_0^{(j)}\,dv - \int\limits_\Omega f_0\,dv = \lim_{j\to\infty} \int\limits_\Omega |\chi_0^{(j)} - f_0|\,dv = 0.$$

Согласно лемме о наибольшем и наименьшем пределе последовательности имеем

$$f_0 = \overline{\lim}\,\psi_k.$$

Покажем теперь, что f_0 удовлетворяет требованию нашей теоремы. Мы имеем

$$\int\limits_\Omega |\psi_j - f_0|\,dv \leqslant \int\limits_\Omega |\psi_j - \chi_0^{(j)}|\,dv + \int\limits_\Omega |\chi_0^{(j)} - f_0|\,dv.$$

Оба слагаемых в правой части последнего неравенства сколь угодно малы при достаточно большом j. Отсюда

$$\int\limits_\Omega |\psi_j - f_0|\,dv < \varepsilon \quad \text{при} \quad j > J(\varepsilon).$$

Повторяя дословно те же рассуждения для функции

$$f_0^* = \underline{\lim}\,\psi_k,$$

получим

$$\int\limits_\Omega |\psi_j - f_0^*|\,dv < \varepsilon$$

и, значит,

$$\int\limits_\Omega |f_0 - f_0^*|\,dv \leqslant \int\limits_\Omega |\psi_j - f_0|\,dv + \int\limits_\Omega |\psi_j - f_0^*|\,dv < 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\int\limits_\Omega |f_0 - f_0^*|\,dv = 0,$$

и функции f_0, f_0^* совпадают почти всюду. Отсюда следует, что последовательность ψ_k имеет предел почти всюду.

Наконец, для любой функции первоначальной последовательности f_k будем иметь

$$\int\limits_\Omega |f_k - f_0|\,dv \leqslant \int\limits_\Omega |f_k - \psi_j|\,dv + \int\limits_\Omega |\psi_j - f_0|\,dv.$$

Следовательно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать натуральное число $N(\varepsilon)$ таким образом, чтобы при $k > N(\varepsilon)$ имело место неравенство

$$\int_{\Omega} |f_k - f_0|\, dv < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(P) \tag{VI.10}$$

мы будем называть сходящимся в смысле Лебега, если существует суммируемая функция u, обладающая тем свойством, что

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\Omega} \left| u - \sum_{k=1}^{N} u_k \right| dv = 0.$$

Сходимость в смысле Лебега влечёт, очевидно, возможность предельного перехода под знаком интеграла. Ряд (VI.10) мы будем называть сходящимся в себе в смысле Лебега, если

$$\int_{\Omega} \left| \sum_{k=m}^{m+p} u_k \right| dv < \varepsilon \quad \text{при} \quad m > N(\varepsilon).$$

Теорема 23 может быть переформулирована для рядов следующим образом: ряд, сходящийся в себе в смысле Лебега, сходится в смысле Лебега к некоторой предельной функции.

Сходящийся в себе ряд можно умножить почленно на любую измеримую ограниченную функцию, и при этом его сходимость, очевидно, сохранится.

Теорема 24. *Сходящаяся в себе последовательность $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы Лебега. Иными словами, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать такое число $\delta(\varepsilon)$, что как только мера открытого множества Ω_δ меньше δ, то для всех функций f_k будет справедливо неравенство*

$$\left| \int_{\Omega_\delta} f_k\, dv \right| < \varepsilon.$$

Докажем эту теорему. Пусть дано положительное число ε. Выберем N таким образом, чтобы при $k > N$, $m > N$ имело место неравенство

$$\int_{\Omega} |f_k - f_m|\, dv < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для любой f_k из функций $f_1, f_2, \ldots, f_N$ в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега мы можем указать такое δ_k, что

$$\int_{\Omega_1} |f_k|\, dv < \frac{\varepsilon}{2},$$

как только $m\Omega_1 < \delta_k$. Возьмём в качестве $\delta(\varepsilon)$ наименьшее из чисел $\delta_1, \delta_2, \ldots$ $\ldots, \delta_N$. Тогда при $k \leqslant N$ утверждение теоремы будет выполнено в силу выбора $\delta(\varepsilon)$, а для $k > N$ выполнение его доказывается следующей оценкой:

$$\left|\int\limits_{\Omega_1} f_k\, dv\right| \leqslant \int\limits_{\Omega_1} |f_k - f_N|\, dv + \int\limits_{\Omega_1} |f_N|\, dv < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 25. *Для того чтобы последовательность $\{f_k\}$ была сходящейся в себе в смысле Лебега в открытом множестве и, следовательно, имела предел в смысле Лебега, достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

1. *Последовательность $\{f_k\}$ сходится почти всюду к некоторой предельной функции f_0.*

2. *Последовательность $\{f_k\}$ обладает равностепенно абсолютно непрерывными интегралами.*

Доказательство. В силу леммы к теореме Егорова существуют замкнутые множества F_δ с мерой, сколь угодно близкой к мере Ω, на которых сходимость равномерная. Выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы иметь

$$\int\limits_{\Omega_1} |f_k|\, dv < \frac{\varepsilon}{3},$$

как только $m\Omega_1 < \delta$. Далее, найдём такое N, что на множестве F_δ будет иметь место неравенство

$$|f_k - f_m| < \frac{\varepsilon}{3m\Omega},$$

как только $k, m > N$. Тогда при $k > N$ и $m > N$ будем иметь

$$\int\limits_{\Omega} |f_k - f_m|\, dv = \int\limits_{\Omega - F_\delta} |f_k - f_m|\, dv + \int\limits_{F_\delta} |f_k - f_m|\, dv \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega - F_\delta} |f_k|\, dv + \int\limits_{\Omega - F_\delta} |f_m|\, dv + \int\limits_{F_\delta} |f_k - f_m|\, dv < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Значит, последовательность $\{f_k\}$ сходится в себе, что и требовалось доказать.

Следствие. *Если последовательность суммируемых функций $f_1, f_2, \ldots$ $\ldots, f_k, \ldots$ сходится почти везде в открытом множестве Ω к предельной функции f_0 и функции f_k по абсолютной величине не превосходят некоторую суммируемую функцию ψ, то существует интеграл*

$$\int\limits_{\Omega} f_0\, dv$$

и имеет место равенство

$$\int\limits_{\Omega} f_0\, dv = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} f_k\, dv. \qquad \text{(VI.11)}$$

В самом деле, из неравенства $|f_k| < \psi$ вытекает равностепенная абсолютная непрерывность интегралов последовательности $\{f_k\}$ и, значит, её сходимость в смысле Лебега. Очевидно, предел её в смысле Лебега должен почти всюду совпадать с f_0. Возможность перехода к пределу под знаком интеграла, как мы уже отмечали, есть следствие сходимости в смысле Лебега.

§ 8. Теорема Лебега-Фубини.

Пусть в кубе $\Omega_0 (0 < x_i < 1, 0 < y_j < 1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$, задана суммируемая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ от $m + n$ независимых переменных. Рассмотрим некоторое измеримое множество E из Ω_0 и пусть $E(y_1, \ldots, y_m)$ будет сечение этого множества многообразием

$$y_1 = \text{const.}, \quad y_2 = \text{const.}, \quad \ldots, \quad y_m = \text{const.},$$

т. е. множество точек, имеющих те же координаты

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

что и точки $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ из E при фиксированных $y_1, \ldots, y_m$. Пусть E_y будет проекция E на многообразие $y_1, \ldots, y_m$, т. е. множество всех точек, координаты $y_1, \ldots, y_m$ которых таковы же, как у каких-либо точек из E.

Определим функцию

$$\psi^{(E)}(y_1, \ldots, y_m) = \begin{cases} 0 \text{ вне } E_y, \\ \displaystyle\int\limits_{E(y_1, \ldots, y_m)} f\,dx_1 \ldots dx_n \text{ в } E_y. \end{cases} \qquad \text{(VI.12)}$$

Тогда:

а) *Интегралы в правой части* (VI.12) *существуют почти для всех значений $y_1, \ldots, y_m$ (т. е. для всех, кроме, быть может, точек некоторого множества с мерой нуль).*

б) *Функция $\psi^{(E)}(y_1, \ldots, y_m)$ есть суммируемая функция от переменных $y_1, \ldots, y_m$.*

$$\text{в)} \int\limits_E f\,dx_1 \ldots dx_n\,dy_1 \ldots dy_m = \int\limits_{0<y_j<1} \psi^{(E)}(y_1, \ldots, y_m)\,dy_1 \ldots dy_m. \qquad \text{(VI.13)}$$

Без ограничения общности можно считать f положительной. Докажем эту теорему сначала для случая, когда E есть область Ω, а функция f непрерывна в Ω. Построим систему Φ_h сеточных множеств, исчерпывающих область Ω. Очевидна формула:

$$\int\limits_{\Phi_h} f\,dx_1 \ldots dx_n\,dy_1 \ldots dy_m = \int\limits_{0<y_j<1} \psi^{(\Phi_h)}(y_1, \ldots, y_m)\,dy_1 \ldots dy_m. \qquad \text{(VI.14)}$$

Последовательность $\psi^{(\Phi_h)}(y_1, \ldots, y_m)$ есть возрастающая последовательность измеримых функций, таких, что

$$\int\limits_{0<y_j<1} \psi^{(\Phi_h)}(y_1, \ldots, y_m)\,dy_1 \ldots dy_m \leqslant \int\limits_{\Omega} f\,dx_1 \ldots dx_n\,dy_1 \ldots dy_m.$$

На основании леммы 8 эта последовательность имеет почти везде предел $\psi'(y_1, \ldots, y_m)$, так, что

$$\lim_{h \to 0} \psi^{(\Phi_h)}(y_1, \ldots, y_m) = \psi'(y_1, \ldots, y_m)$$

и

$$\lim_{h \to 0} \int\limits_{0<y_j<1} \psi^{(\Phi_h)}(y_1, \ldots, y_m)\,dy_1 \ldots dy_m = \int\limits_{0<y_j<1} \psi'(y_1, \ldots, y_m)\,dy_1 \ldots dy_m.$$

Но $\Phi_h(y_1,\ldots,y_m)$ образуют исчерпывающую систему многогранников для $\Omega(y_1,\ldots,y_m)$, ибо любая точка $\Omega(y_1,\ldots,y_m)$ попадёт в один из $\Phi_h(y_1,\ldots,y_m)$, следовательно,

$$\psi'(y_1,\ldots,y_m)=\psi^{(\Omega)}(y_1,\ldots,y_m).$$

Переходя к пределу в (VI.14), получим наше утверждение.

Из доказанного следует одно важное замечание.

Замечание. Пусть мы рассматриваем систему областей $\Omega_1\supset\Omega_2\supset\ldots$ $\ldots\supset\Omega_k\supset\ldots$ таких, что

$$\lim_{k\to\infty} m\Omega_k=0.$$

Тогда почти для всех $y_1,\ldots,y_m$ будем иметь: $m\Omega_k(y_1,\ldots,y_m)\to 0$ при $k\to\infty$

В самом деле, по доказанному:

$$m\Omega_k=\int\limits_{0<y_j<1} m\Omega_k(y_1,\ldots,y_m)\,dy_1\ldots dy_m.$$

Последовательность функций $m\Omega_k(y_1,\ldots,y_m)=\psi_k(y_1,\ldots,y_m)$ монотонна и ограничена; следовательно, она имеет предел во всех точках

$$\lim_{k\to\infty}\psi_k=\psi_0(y_1,\ldots,y_m).$$

На основании леммы 8 мы можем перейти к пределу под знаком интеграла:

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{0<y_j<1}\psi_k\,dy_1\ldots dy_m=\int\limits_{0<y_j<1}\psi_0\,dy_1\ldots dy_m=\lim_{k\to\infty} m\Omega_k=0.$$

Следовательно, $\psi_0=0$ почти везде. Наше утверждение доказано.

Рассмотрим теперь случай, когда E есть замкнутое множество F, на котором f непрерывна. Этот случай приводится к предыдущему, если распространить f на весь куб Ω_0 и рассмотреть область $\Omega=\Omega_0-F$. Очевидно,

$$\int\limits_F f\,dx_1\ldots dx_n\,dy_1\ldots dy_m=\int\limits_{\Omega_0} f\,dx_1\ldots dx_n\,dy_1\ldots dy_m-$$
$$-\int\limits_{\Omega} f\,dx_1\ldots dx_n\,dy_1\ldots dy_m. \tag{VI.15}$$

С другой стороны,

$$\psi^{(F)}+\psi^{(\Omega)}=\psi^{(\Omega_0)}$$

и, значит,

$$\int\limits_{0<y_j<1}\psi^{(F)}\,dy_1\ldots dy_m=$$
$$=\int\limits_{0<y_j<1}\psi^{(\Omega_0)}\,dy_1\ldots dy_m-\int\limits_{0<y_j<1}\psi^{(\Omega)}\,dy_1\ldots dy_m. \tag{VI.16}$$

Подставляя в правую часть (VI.15) представление $(m+n)$-кратных интегралов через функции $\psi^{(\Omega_0)}$ и $\psi^{(\Omega)}$ и пользуясь формулой (VI.16), получим нашу теорему для этого случая.

Рассмотрим, наконец, случай, когда E есть открытое множество Ω, а f — произвольная суммируемая функция. Общий случай измеримого множества E можно легко свести к этому случаю.

Построим исчерпывающую систему замкнутых множеств F_k для функции f. По доказанному

$$\int_{F_k} f\,dx_1 \ldots dx_n\,dy_1 \ldots dy_m = \int_{0<y_j<1} \psi^{(F_k)}\,dy_1 \ldots dy_m. \qquad \text{(VI.17)}$$

Последовательность $\psi^{(F_k)}$ есть возрастающая последовательность измеримых функций, таких, что

$$\int_{0<y_j<1} \psi^{(F_k)}\,dy_1 \ldots dy_m \leqslant \int_{\Omega} f\,dx_1 \ldots dx_n\,dy_1 \ldots dy_m.$$

На основании леммы 8 она имеет почти везде конечный предел ψ', такой, что

$$\lim \psi^{(F_k)} = \psi', \quad \lim \int_{0<y_j<1} \psi^{(F_k)}\,dy_1 \ldots dy_m = \int_{0<y_j<1} \psi'\,dy_1 \ldots dy_m.$$

Докажем, что

$$\psi' = \psi^{(\Omega)}.$$

С этой целью установим, что $F_k(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ образуют исчерпывающую систему для $\Omega(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ почти для всех $y_1, \ldots, y_m$.

В самом деле мера $\Omega - F_k$ сколь угодно мала при достаточно большом k. Следовательно, в силу замечания на стр. 123 почти для всех $y_1, \ldots, y_m$

$$\lim_{k\to\infty} m\,[\Omega(y_1, y_2, \ldots, y_m) - F_k(y_1, y_2, \ldots, y_m)] = 0.$$

Значит $F_k(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ действительно образуют исчерпывающую систему для $\Omega(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ почти для всех $y_1, \ldots, y_m$ и, значит, $\psi' = \psi^{(\Omega)}$.

Предельный переход в формуле (VI.17) доказывает теорему Лебега-Фубини.

Добавление. Если функция

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$$

измерима, $f \geqslant 0$ и если, кроме того, функция $\psi^{(E)}$ существует и суммируема, т. е. утверждение а) теоремы Лебега-Фубини выполняется и правая часть формулы (VI.13) имеет смысл, то функция f будет суммируемой и, следовательно, теорема Лебега-Фубини справедлива в полном объёме. Тогда имеет смысл и левая часть формулы (VI.13), которая равна правой.

Это почти очевидно. В самом деле, если бы оказалось, что функция f не суммируема, то интегралы

$$\int_F f\,dx_1 \ldots dx_n\,dy_1 \ldots dy_m,$$

взятые по замкнутым множествам, на которых она непрерывна, могли бы быть сделаны как угодно большими. Пусть интеграл, стоящий в правой части (VI.13), равен A. Выберем замкнутое множество F так, чтобы иметь

$$\int_F f\,dx_1 \ldots dx_n\,dy_1 \ldots dy_m > A + 1.$$

Построим функцию

$$f_1 = \xi(P) f(P),$$

где ξ — характеристическая функция множества F. Тогда $\psi_1^{(E)}$ существует и суммируема, причём

$$\int\limits_{0 \leqslant y_i \leqslant 1} \psi_1^{(E)} \, dy_1 \, dy_2 \ldots dy_m > A + 1.$$

С другой стороны, очевидно,

$$\psi_1^{(E)} \leqslant \psi^{(E)},$$

и, значит,

$$\int\limits_{0 \leqslant y_i \leqslant 1} \psi_1^{(E)} dy_1 \, dy_2 \ldots dy_m \leqslant \int\limits_{0 \leqslant y_i \leqslant 1} \psi^{(E)} \, dy_1 \, dy_2 \ldots dy_m = A.$$

Получившееся противоречие говорит о том, что наше предположение неверно.

Из теоремы Лебега-Фубини вытекает ещё одно очевидное следствие, заслуживающее быть отмеченным: *в повторном интеграле от суммируемой функции можно менять порядок интегрирования.*

ЛЕКЦИЯ VII.

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА.

§ 1. Интегралы, равномерно сходящиеся при данном значении параметра.

Пусть в замкнутой области D переменных $x_1, \ldots, x_n$ задана функция $F(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$, зависящая от параметра λ, значения которого находятся в промежутке

$$a \leqslant \lambda \leqslant b.$$

Рассмотрим интеграл

$$\psi(\lambda) = \int \underset{D}{\cdots} \int F(x_1, \ldots, x_n, \lambda)\, dx_1 \ldots dx_n. \qquad \text{(VII.1)}$$

Этот интеграл мы будем считать существующим в смысле Лебега. Иными словами, мы предполагаем, что функция $F(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$ как функция точки $(x_1, \ldots, x_n)$ в n-мерном пространстве станет непрерывной, если мы исключим из замкнутой области некоторое открытое множество точек σ сколь угодно малой меры. В приложениях мы по большей части будем рассматривать случай, когда $F(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$ разрывна в точках, принадлежащих некоторым многообразиям меньшего числа измерений (в изолированных точках, на конечном числе поверхностей, линий и т. п.). Тогда

$$\int \underset{D}{\cdots} \int F(x_1, \ldots, x_n, \lambda)\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \lim \int \underset{D-\sigma}{\cdots} \int F(x_1, \ldots, x_n, \lambda)\, dx_1 \ldots dx_n$$

по какому бы способу ни уменьшалось открытое множество σ, лишь бы мера его стремилась к нулю. Мы будем говорить, что интеграл (VII.1) *сходится равномерно* при $\lambda = \lambda_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $h(\varepsilon)$ и такую часть $\sigma(\varepsilon)$ области D, что

1. Функция $F(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$ непрерывна по $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda$ на замкнутом множестве $D - \sigma(\varepsilon)$ при $|\lambda - \lambda_0| \leqslant h(\varepsilon)$.

2. Интеграл

$$\int_{\sigma(\varepsilon)} \cdots \int |F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)|\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

меньше ε для всех значений λ из промежутка $\lambda_0 - h(\varepsilon) \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0 + h(\varepsilon)$.

3. Область $D - \sigma(\varepsilon)$ ограничена (это условие не нужно, если область D ограничена).

Лемма 1. *Равномерно сходящийся при $\lambda = \lambda_0$ интеграл есть функция от λ, непрерывная в этой точке.*

В самом деле,

$$\Big| \int_D \cdots \int F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1)\, dx_1 \ldots dx_n -$$
$$- \int_D \cdots \int F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0)\, dx_1 \ldots dx_n \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \Big| \int_{D-\sigma} \cdots \int [F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1) - F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0)]\, dx_1 \ldots dx_n \Big| +$$
$$+ \Big| \int_\sigma \cdots \int F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1)\, dx_1 \ldots dx_n \Big| +$$
$$+ \Big| \int_\sigma \cdots \int F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0)\, dx_1 \ldots dx_n \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{D-\sigma} \cdots \int |F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1) - F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0)|\, dx_1 \ldots dx_n +$$
$$+ \int_\sigma \cdots \int |F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1)|\, dx_1 \ldots dx_n +$$
$$+ \int_\sigma \cdots \int |F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0)|\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Выбрав $\sigma(\varepsilon)$ и $h(\varepsilon)$ такими, чтобы второе и третье слагаемые каждое порознь были меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, а затем, взяв $|\lambda_1 - \lambda_0|$ столь малым, чтобы для всех $x_1, \ldots, x_n$, принадлежащих области $D - \sigma$, имело место неравенство

$$|F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1) - F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0)| < \frac{\varepsilon}{3(D-\sigma)},$$

где $D - \sigma$ означает меру (объём) области $D - \sigma$, мы получим:

$$\Big| \int_D \cdots \int F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1)\, dx_1 \ldots dx_n -$$
$$- \int_D \cdots \int F(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \Big| < \varepsilon.$$

Наша лемма доказана.

Интеграл (VII.1), сходящийся при всех λ из некоторого промежутка так, что можно найти общее $\sigma(\varepsilon)$ для всех λ, будет равномерно сходящимся в этом промежутке (в обычном смысле). Равномерно сходящийся в некотором промежутке интеграл есть непрерывная функция в промежутке.

В некоторых случаях удобно соответственным образом обобщить понятие о равномерной сходимости интеграла при данном значении параметра на случай, когда параметром служит какая-нибудь точка P с координатами $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ в пространстве n-измерений.

Рассмотрим интеграл:

$$\int \ldots \int_D F(x_1, \ldots, x_n, P)\, dx_1 \ldots dx_n. \qquad \text{(VII.2)}$$

Мы будем говорить, что этот интеграл равномерно сходится в точке P_0, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такую окрестность $h(\varepsilon)$ точки P_0 и такую часть $\sigma(\varepsilon)$ области D, что:

1. Функция F непрерывна, когда P находится в окрестности $h(\varepsilon)$ точки P_0, а $(x_1, \ldots, x_n)$ — на замкнутом множестве $D - \sigma(\varepsilon)$.

2. Интеграл

$$\int \ldots \int_\sigma |F(x_1, \ldots, x_n, P)|\, dx_1 \ldots dx_n$$

меньше ε для всех P из $h(\varepsilon)$.

3. Область $D - \sigma$ ограничена.

Для этого случая также имеет место

Лемма 2. *Равномерно сходящийся при $P = P_0$ интеграл есть функция от P, непрерывная в точке P_0.*

Доказательство является повторением рассуждений предыдущей леммы.

Пример. Пусть функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, P)$, заданная в ограниченной области D, удовлетворяет условию

$$|F(x_1, \ldots, x_n, P)| < \frac{A}{r^{n-\alpha}},$$

где $\alpha > 0$ и A — некоторая постоянная. Через r обозначено расстояние от точки $P(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ до точки с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$. Во всей области D, кроме точки $P(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$, предположим F непрерывной функцией $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Легко установить равномерную сходимость интеграла

$$\int \ldots \int_D F(x_1, \ldots, x_n, P)\, dx_1 \ldots dx_n$$

в любой точке P_0, лежащей внутри D. Достаточно взять за σ шар такого радиуса ρ, описанный вокруг P_0, чтобы

$$\int_{r \leqslant 2\rho} \cdots \int \frac{A}{r^{n-\alpha}} dx_1 \ldots dx_n < \varepsilon,$$

а за $h(\varepsilon)$ — шар радиуса

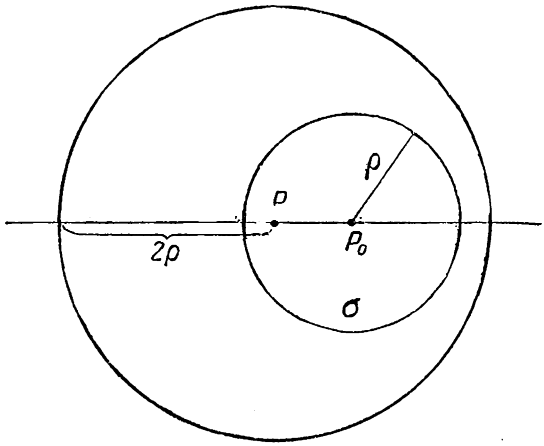
$$\rho_1 < \rho.$$

В самом деле, при этом

$$\left| \int_{\sigma} \cdots \int F(x_1, \ldots, x_n, P) \, dx_1 \ldots dx_n \right| < \int_{\sigma} \cdots \int |F| \, dx_1 \ldots dx_n <$$

$$< \int_{r \leqslant 2\rho} \cdots \int \frac{A}{r^{n-\alpha}} dx_1 \ldots dx_n < \varepsilon \text{ [1]}.$$

Очевидно, что в $D - \sigma$ и на её границе для точек P из окрестности $h(\varepsilon)$ функция F будет непрерывной функцией своих аргументов.



Черт. 10.

§ 2. Производная по параметру от несобственных интегралов.

Пусть мы имеем интеграл

$$\psi(\lambda) = \int_{D} \cdots \int F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n$$

[1]) Очевидно, что шар радиуса $r \leqslant 2\rho$ с центром в точке P будет содержать шар σ с центром P_0 (черт. 10), если точка P отстоит от точки P_0 не более чем на $\rho_1 < \rho$.

по области D, не зависящей от параметра λ. В анализе часто приводится формула

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\int\limits_D\cdots\int F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n = \int\limits_D\cdots\int\frac{\partial F}{\partial\lambda}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n = \varphi(\lambda),$$

справедливая в том случае, когда интеграл в правой части — собственный. Нам полезно будет избавиться от этого предположения. Справедлива

Теорема 1. *Если*

а) *Функция* $F(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$ *есть первообразная по* λ *функция для* $f(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$ *в области* D *переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *при* $a \leqslant \lambda \leqslant b$, *т. е.*

$$F(x_1, \ldots x_n, \lambda) - F(x_1, \ldots, x_n, a) = \int\limits_a^\lambda f(x_1, \ldots, x_n, \lambda)\,d\lambda$$

при всех $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *из* D, *кроме, быть может, некоторого множества меры нуль.* (По большей части это множество будет состоять из отдельных точек, линий или поверхностей.)

б) *Функция* f — *суммируемая функция* $(n+1)$ *переменного* $(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$, *т. е.* $(n+1)$*-мерный интеграл*

$$\int\limits_a^\lambda\int\limits_D\cdots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)\,dx_1\ldots dx_n\,d\lambda$$

существует при $a \leqslant \lambda \leqslant b$.

в) *Функция*

$$\varphi(\lambda) = \int\limits_D\cdots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)\,dx_1\ldots dx_n$$

непрерывна при $\lambda = \lambda_0$.

Тогда справедлива формула:

$$\left.\frac{\partial\psi(\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\int\limits_D\cdots\int F(x_1, \ldots, x_n, \lambda)\,dx_1\ldots dx_n\Big|_{\lambda=\lambda_0} = \int\limits_D\cdots\int f(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0)\,dx_1\ldots dx_n.$$

Доказательство этой теоремы не представляет труда. По определению

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_0}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_D\cdots\int[F(x_1,\ldots,x_n,\lambda_0+h)-$$
$$-F(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_0)]\,dx_1\ldots dx_n.$$

Интеграл, стоящий в правой части, равен на основании теоремы Фубини об изменении порядка интегрирования $(n+1)$-мерному интегралу

$$\int\limits_D\cdots\int f\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n\,d\lambda,$$
$$\lambda_0<\lambda<\lambda_0+h,$$

а этот последний интеграл представляется в виде

$$\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_0+h}\Big(\int\limits_D\cdots\int f\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n\Big)\,d\lambda.$$

Пользуясь свойством неопределённых интегралов Лебега в точке непрерывности подинтегральной функции (см. лекция VI, § 5, теорема 16), имеем:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_0}=\varphi(\lambda_0),$$

что и требовалось доказать.

Нам часто придётся пользоваться этой теоремой для тех или иных интегралов. Мы дадим несколько простейших признаков выполнения основного условия (б) этой теоремы.

Условия (а) и (в) обычно проверяются без труда.

Признак 1. Условие (б) теоремы 1 (VII) выполнено, если интеграл

$$\int\limits_D\cdots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

равномерно сходится в замкнутом промежутке

$$a\leqslant\lambda\leqslant b.$$

Доказательства этого признака мы не приводим. Читатели легко проведут его сами.

Признак 2. Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)$ непрерывна по всем своим аргументам везде, за исключением гладкой непрерывной по λ линии:

$$x_1=a_1(\lambda),\qquad x_2=a_2(\lambda),\ \ldots,\ x_n=a_n(\lambda),\tag{VII. 3}$$
$$a\leqslant\lambda\leqslant b,$$

и в окрестности этой линии удовлетворяет неравенству

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)| \leqslant A\rho^{-n+\varepsilon},$$

где

$$\rho = \min_{a \leqslant \lambda \leqslant b} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [x_i - a_i(\lambda)]^2}, \quad \varepsilon > 0,$$

то условие (б) выполнено.

Выделим из $(n+1)$-мерной области

$$\begin{cases} D \\ a \leqslant \lambda \leqslant b \end{cases}$$

линию (VII. 3) с помощью области σ_0, в точках которой $\rho < \rho_0$, где ρ_0 — постоянная. Интеграл

$$\int \underset{\substack{D \\ a \leqslant \lambda \leqslant b}}{\cdots} \int |f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)| \, dx_1 \ldots dx_n \, d\lambda \qquad \text{(VII. 4)}$$

будет сходящимся, если существует предел интеграла

$$\int \underset{\left\{\substack{D \\ a \leqslant \lambda \leqslant b}\right\} - \sigma_0}{\cdots} \int |f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)| \, dx_1 \ldots dx_n \, d\lambda \quad \text{при} \quad \rho_0 \to 0.$$

Этот предел существует, если при $\rho_0 \to 0$ интеграл

$$\int \underset{\sigma_0}{\cdots} \int |f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)| \, dx_1 \ldots dx_n \, d\lambda$$

стремится к нулю равномерно относительно λ.

Мы имеем:

$$\int \underset{\sigma_0}{\cdots} \int |f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)| \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n \, d\lambda \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b d\lambda \int \underset{0 < \rho \leqslant \rho_0}{\cdots} \int A\rho^{-n+\varepsilon} \, dx_1 \ldots dx_n.$$

Но

$$\int \underset{0 < \rho \leqslant \rho_0}{\cdots} \int \rho^{-n+\varepsilon} \, dx_1 \ldots dx_n = c_n \rho_0^{\varepsilon};$$

отсюда ясна сходимость исследуемого интеграла.

Признак 3. Если область D не ограничена то, кроме особенности признака 2, оцениваемой на основе прежних соображений, нужно оценить поведение функции на бесконечности.

Сходимость интеграла (VII. 4) обеспечена, если

$$|F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)| \leqslant Ar^{-b-\varepsilon},$$

где

$$\varepsilon > 0 \quad \text{и} \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Читатель легко докажет справедливость этого признака.

ЛЕКЦИЯ VIII.

УРАВНЕНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА.

§ 1. Фундаментальное решение.

После того как мы рассмотрели некоторые задачи для уравнений с двумя независимыми переменными, мы переходим к уравнениям со многими независимыми переменными.

Рассмотрим прежде всего уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}+f(x, y, z, t), \qquad (\text{VIII}.1)$$

определяющее температуру в точках некоторого однородного изотропного тела.

Замена переменного t по формуле

$$t_1=a^2 t$$

позволяет избавиться от коэффициента a^2. Поэтому мы будем при дальнейшем изложении считать a^2 равным единице. Обозначая, как и прежде, сумму вторых частных производных через Δu, запишем уравнение распространения тепла в виде

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial t}+f(x, y, z, t). \qquad (\text{VIII}.1')$$

Это уравнение мы и будем решать.

Мы рассмотрим здесь задачу о распространении тепла в неограниченной среде.

Будем решать для уравнения (VIII.1′) задачу Коши, т. е. задачу об интегрировании уравнения (VIII.1′) при начальном условии

$$u|_{t=0}=\varphi(x, y, z). \qquad (\text{VIII}.2)$$

Это условие, как мы указывали в лекции II, означает, что в начальный момент времени распределение температур в теле известно.

При этом существенную роль будет играть одно частное решение однородного уравнения теплопроводности.

Рассмотрим функцию

$$v = \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}(t_0 - t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4(t_0 - t)}}, \tag{VIII.3}$$

где

$$r = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}.$$

Докажем несколько лемм относительно этой функции.

Лемма 1. *Функция v удовлетворяет уравнениям*

$$\Delta_0 v - \frac{\partial v}{\partial t_0} = 0, \quad \Delta v + \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \tag{VIII.4}$$

(Здесь $\Delta_0 v$ обозначает $\frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z_0^2}$.)

В самом деле, дифференцирование даёт

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} = -\frac{1}{16\pi^{\frac{3}{2}}(t_0 - t)^{\frac{5}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4(t_0 - t)}} + \frac{(x_0 - x)^2}{32\pi^{\frac{3}{2}}(t_0 - t)^{\frac{7}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4(t_0 - t)}},$$

и аналогичные выражения для производных по y_0 и z_0, откуда

$$\Delta_0 v = \left(\frac{-3}{16\pi^{\frac{3}{2}}(t_0 - t)^{\frac{5}{2}}} + \frac{r^2}{32\pi^{\frac{3}{2}}(t_0 - t)^{\frac{7}{2}}} \right) e^{-\frac{r^2}{4(t_0 - t)}},$$

и далее

$$\frac{\partial v}{\partial t_0} = \left(\frac{-3}{16\pi^{\frac{3}{2}}(t_0 - t)^{\frac{5}{2}}} + \frac{r^2}{32\pi^{\frac{3}{2}}(t_0 - t)^{\frac{7}{2}}} \right) e^{-\frac{r^2}{4(t_0 - t)}},$$

что доказывает выполнение первого из уравнений (VIII.4). Второе получается из первого, если заметить, что функция зависит только от разностей $(x_0 - x)$, $(y_0 - y)$, $(z_0 - z)$, $(t_0 - t)$, и, значит,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial t_0} = -\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Лемма 2. *При $t_0 > t$ имеет место равенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v\,dx\,dy\,dz = 1.$$

В самом деле, вводя полярные координаты r, θ и φ и пользуясь симметрией v и интегрируя по частям, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\infty} r^2\,dr \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} v\sin\theta\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{r^2}{2\pi^{\frac{1}{2}}(t_0-t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}}\,dr = \frac{-1}{\pi^{\frac{1}{2}}(t_0-t)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\infty} r\,d\left(e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}(t_0-t)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}}\,dr = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}}\,d\frac{r}{2(t_0-t)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz.$$

На основании хорошо известной формулы имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz = \sqrt{\pi}, \tag{VIII.5}$$

откуда и вытекает наша лемма[1]).

Лемма 3. *Рассмотрим интеграл, взятый по какой-либо конечной области* Ω:

$$f(t_0-t,\ x_0,\ y_0,\ z_0) = \iiint_{\Omega} v\,dx\,dy\,dz.$$

При $t_0-t\to 0$ *этот интеграл стремится к единице, если точка* $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ *лежит внутри области* Ω, *и к нулю, если точка* $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ *лежит вне этой области.*

Совершим замену независимых переменных, полагая

$$x-x_0=\sqrt{t_0-t}\,x_1;\quad y-y_0=\sqrt{t_0-t}\,y_1;\quad z-z_0=\sqrt{t_0-t}\,z_1.$$

---

[1]) Доказательство формулы (VIII.5) можно, например, провести так:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr\int_0^{2\pi} d\theta = \pi\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,d(r^2) = -\pi e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} = \pi.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz = \sqrt{\pi}.$$

При этом

$$f(t_0-t,\ x_0,\ y_0,\ z_0)=\frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}}\int\int_{\Omega_1}\int e^{-\frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{4}}\,dx_1\,dy_1\,dz_1,$$

где область интегрирования Ω_1 в переменных x_1, y_1, z_1 получается из области Ω переменных x, y, z преобразованием подобия с коэффициентом подобия $\frac{1}{\sqrt{t_0-t}}$ из вершины $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ с последующим переносом начала координат в точку $(x_0,\ y_0,\ z_0)$. При стремлении t_0-t к нулю эта область будет неограниченно расширяться. Если точка $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ лежит внутри области Ω, то область Ω_1 будет расширяться во все стороны, в пределе охватывая всё пространство. На основании предшествующей леммы заключаем, что в этом случае предел интеграла $f(t_0-t,\ x_0,\ y_0,\ z_0)$ будет равен единице.

Если, наоборот, точка $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ лежит вне области Ω, то область Ω_1 при $t_0-t\to 0$ будет расширяться, удаляясь при этом от начала координат так, что её кратчайшее расстояние до начала координат в системе x_1, y_1, z_1 будет возрастать неограниченно. В силу сходимости интеграла от v по бесконечному пространству, установленной в предыдущей лемме, предел интеграла $f(t_0-t,\ x_0,\ y_0,\ z_0)$ в этом случае равен нулю. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $F(x,\ y,\ z)$ — произвольная непрерывная и ограниченная в некоторой области Ω функция (в частности, Ω может совпадать со всем пространством). Тогда*

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}}\int\int_{\Omega}\int e^{-\frac{r^2}{4\xi}}F(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=F(x_0,\ y_0,\ z_0), \tag{VIII.6}$$

если точка $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ принадлежит области Ω. В формуле (VIII.6) *стремление к пределу равномерное по отношению к $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ во всякой конечной области Ω_1, лежащей внутри Ω вместе со своей границей.* Здесь предполагается, что ξ стремится к нулю, оставаясь положительным.

Для доказательства составим разность

$$\frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}}\int\int_{\Omega}\int e^{-\frac{r^2}{4\xi}}F(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz-$$

$$-F(x_0,\ y_0,\ z_0)\frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}}\int\int_{\Omega}\int e^{-\frac{r^2}{4\xi}}\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}}\int\int_{\Omega}\int e^{-\frac{r^2}{4\xi}}[F(x,\ y,\ z)-F(x_0,\ y_0,\ z_0)]\,dx\,dy\,dz. \tag{VIII.7}$$

Второй член этой разности стремится к $F(x_0, y_0, z_0)$ в силу леммы 3 и притом равномерно. Для того чтобы доказать лемму 4, достаточно показать, что эта разность во всякой области $\Omega_1(x_0, y_0, z_0)$ равномерно стремится к нулю при $\xi \to 0$.

Выделим точку (x_0, y_0, z_0) шаром малого радиуса δ. Пусть δ достаточно мало, так что при $r \leqslant \delta$

$$|F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

причём это неравенство выполняется равномерно для всех точек (x_0, y_0, z_0) области Ω_1.

Оценим разность (VIII.7), разбив интеграл в правой части на два слагаемых, соответственно распространённых на шар $r \leqslant \delta$ и на его внешность. Мы получим:

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega v\,[F(x,y,z) - F(x_0,y_0,z_0)]\,dx\,dy\,dz = \\ = \iiint_{r \leqslant \delta} v\,[F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)]\,dx\,dy\,dz + \\ + \iiint_{r \geqslant \delta} v\,[F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)]\,dx\,dy\,dz. \qquad \text{(VIII.8)} \end{aligned}$$

Оценим первый из интегралов, входящих в (VIII.8):

$$\left| \iiint_{r \leqslant \delta} v\,[F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)]\,dx\,dy\,dz \right| \leqslant \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2} v\,dx\,dy\,dz = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, в силу ограниченности F существует такая постоянная M, что

$$|F| \leqslant M,$$

и, следовательно,

$$\left| \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{r \geqslant \delta} e^{-\frac{r^2}{4\xi}} [F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)]\,dx\,dy\,dz \right| \leqslant \leqslant \frac{2M}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{r \geqslant \delta} e^{-\frac{r^2}{4\xi}}\,dx\,dy\,dz.$$

Заменяя переменные в последнем интеграле, полагаем $x = \sqrt{\xi}x_1$, $y = \sqrt{\xi}y_1$, $z = \sqrt{\xi}z_1$; тогда $r_1^2 = \frac{r^2}{\xi}$, и мы имеем:

$$\frac{2M}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{r_1 \geqslant \frac{\delta}{\sqrt{\xi}}} e^{-\frac{r_1^2}{4}}\,dx_1\,dy_1\,dz_1 = \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\delta}{\sqrt{\xi}}}^{\infty} r_1^2 e^{-\frac{r_1^2}{4}}\,dr.$$

При достаточно малом ξ этот интеграл меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$, в силу сходимости интеграла

$$\int\limits_0^\infty r_1^2 e^{-\frac{r_1^2}{4}} dr_1.$$

Отсюда и следует наша лемма.

Замечание. Вместо интеграла (VIII.6) можем рассмотреть более общий интеграл:

$$\Phi(x_0, y_0, z_0, \xi) = \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}} \int\int\limits_\Omega\int e^{-\frac{r^2}{4\xi}} F(x, y, z, \xi)\, dx\, dy\, dz, \qquad \text{(VIII.9)}$$

в котором подинтегральная функция $F(x, y, z, \xi)$ зависит от параметра ξ, непрерывна и ограничена при положительных значениях ξ:

$$|F(x, y, z, \xi)| < M.$$

Пусть

$$\lim_{\xi\to 0} F(x, y, z, \xi) = F(x, y, z), \qquad \text{(VIII.10)}$$

причём $F(x, y, z, \xi)$ стремится к $F(x, y, z)$ равномерно в любой области Ω_1, лежащей вместе с границей внутри Ω. Тогда

$$\lim_{\xi\to 0} \Phi(x_0, y_0, z_0, \xi) = F(x_0, y_0, z_0).$$

В самом деле, рассмотрим разность

$$\Phi(x_0, y_0, z_0, \xi) - \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}} \int\int\limits_\Omega\int e^{-\frac{r^2}{4\xi}} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}} \int\int\limits_\Omega\int e^{-\frac{r^2}{4\xi}} [F(x, y, z, \xi) - F(x, y, z)]\, dx\, dy\, dz.$$

Разбивая этот интеграл на две части: на интеграл по шару $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \leqslant 1$, который мы обозначим через σ, и интеграл по внешности этого шара, получим при достаточно малом ξ

$$\left| \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}} \int\int\limits_\sigma\int e^{-\frac{r^2}{4\xi}} [F(x, y, z, \xi) - F(x, y, z)]\, dx\, dy\, dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}} \int\int\limits_\sigma\int e^{-\frac{r^2}{4\xi}} dx\, dy\, dz < \varepsilon,$$

где ε — любое наперёд заданное положительное число.

Далее,

$$\left|\frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}}\int\int\limits_{\Omega-\sigma}\int e^{-\frac{r^2}{4\xi}}\,[F(x, y, z, \xi)-F(x, y, z)]\,dx\,dy\,dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{4\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}}\int\int\limits_{\Omega-\sigma}\int e^{-\frac{r^2}{4\xi}}\,dx\,dy\,dz.$$

Последнее выражение опять стремится к нулю (см. оценку в лемме (VIII.4)). Следовательно,

$$\lim_{\xi\to 0}\Phi(x_0, y_0, z_0, \xi)=\lim_{\xi\to 0}\left[\frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}}\int\int\limits_{\Omega}\int e^{-\frac{r^2}{4\xi}}\,F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz\right];$$

но последний предел в силу леммы 4 равен $F(x_0, y_0, z_0)$. Наше замечание доказано.

§ 2. Решение задачи Коши.

Перейдём к решению уравнения (VIII.1′). Пусть при $t>0$ задана некоторая функция u, имеющая непрерывные производные до 2-го порядка включительно по пространственным координатам и производную 1-го порядка по времени. Пусть как u, так и её первые производные ограничены во всём пространстве.

Применим формулу Грина (V.16) к функциям u, v для значений t из полуинтервала $0\leqslant t<t_0$, причём за область интегрирования возьмём шар Ω, ограниченный сферой S. Мы получим

$$\int\int\limits_{\Omega}\int(u\,\Delta v-v\,\Delta u)\,d\Omega=\int\limits_{S}\int\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS. \qquad \text{(VIII.11)}$$

Далее, формула

$$\int_0^{t_0}\left\{\int\int\limits_{\Omega}\int\left(u\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial u}{dt}\right)d\Omega\right\}dt=\left[\int\int\limits_{\Omega}\int uv\,d\Omega\right]_0^{t_0},$$

как легко проверить, справедлива для любых функций u и v, обладающих тем свойством, что интеграл

$$\int\int\limits_{\Omega}\int uv\,d\Omega$$

есть непрерывная функция t в промежутке $0 \leqslant t \leqslant t_0$ и, кроме того, интеграл

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial t}\right) d\Omega$$

есть непрерывная функция t в промежутке $0 < t < t_0$.

Сопоставляя эту формулу с (VIII.11), получим:

$$\int\limits_0^{t_0} \left\{ \iiint\limits_{\Omega} \left[u\left(\Delta v + \frac{\partial v}{\partial t}\right) - v\left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] d\Omega \right\} dt =$$

$$= \left[\iiint\limits_{\Omega} uv\, d\Omega\right]_0^{t_0} + \int\limits_0^{t_0} \left\{ \iint\limits_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS \right\} dt. \qquad \text{(VIII.12)}$$

Подставляя в тождество (VIII.12), справедливое при любых u и v, вместо u искомое решение уравнения (VIII.2) и считая, что v есть частное решение уравнения теплопроводности, определённое формулой (VIII.3), мы в силу (VIII.2) и (VIII.4) будем иметь:

$$\int\limits_0^{t_0} \left\{ \iint\limits_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS \right\} dt + \left[\iiint\limits_{\Omega} uv\, d\Omega\right]_0^{t_0} =$$

$$= -\int\limits_0^{t_0} \left\{ \iiint\limits_{\Omega} vf(x, y, z, t)\, d\Omega \right\} dt. \qquad \text{(VIII.13)}$$

Отметим, что интегралы вида: $\int\limits_0^{t_0} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} vF(x, y, z, t)\, d\Omega \right\} dt$, абсолютно сходятся, если $F(x, y, z, t)$ — непрерывная ограниченная функция. В самом деле,

$$\int\limits_0^{t_0} \left\{ \iiint\limits_{\Omega} |vF(x, y, z, t)|\, d\Omega \right\} dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{t_0} \left\{ \iiint\limits_{\Omega} \max|F(x, y, z, t)|\, v\, d\Omega \right\} dt \leqslant \max|F(x, y, z, t)|\, t_0.$$

Мы будем пока предполагать, что $f(x, y, z, t)$ и $\varphi(x, y, z)$ — непрерывные ограниченные функции.

Предположим ещё, что функция $u(x, y, z, t)$ при $t \to t_0$ стремится к своим начальным значениям равномерно во всякой ограниченной области.

Перейдём к пределу в формуле (VIII.13), устремляя радиус шара Ω к бесконечности. Интегралы по поверхности S при этом обратятся в нуль, так как по предположению решение u таково, что как u, так и $\frac{\partial u}{\partial n}$ ограничены, а $e^{-\frac{r^2}{\xi}}$ стремится к нулю быстрее любой степени r при $r \to \infty$.

Мы получим, очевидно:

$$\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} uv\,dx\,dy\,dz\right]_0^{t_0} =$$

$$= -\int\limits_0^{t_0}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} vf(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz\right\}dt.$$

В силу замечания к лемме 4

$$\lim_{t \to t_0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} uv\,dx\,dy\,dz = u(x_0, y_0, z_0, t_0),$$

поэтому

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y, z)\, v\Big|_{t=0} dx\,dy\,dz -$$

$$- \int\limits_0^{t_0}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} vf(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz\right\}dt. \qquad \text{(VIII.14)}$$

Формула (VIII.14) даёт выражение для решения нашей задачи. При выводе этой формулы мы предполагали, что решение задачи существует. Поэтому нам необходимо проверить, будет ли функция u, определяемая формулой (VIII.14), в самом деле удовлетворять уравнению (VIII.2) и начальному условию.

Полезно заметить, что уравнение (VIII.2), решённое нами для $t > 0$, при начальном условии, заданном для $t = 0$, может совсем не иметь решения для $t < 0$. Во всяком случае решение (VIII.14), вообще говоря, при этом перестанет иметь смысл.

Переходя к доказательству, установим сначала, что функция u, заданная формулой (VIII.14), имеет непрерывные производные до некоторого определённого порядка. В самом деле, заменяя переменные интегрирования:

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0, \quad \zeta = z - z_0, \quad \tau = t_0 - t,$$

формулу (VIII.14) можно переписать так:

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v(\xi, \eta, \zeta, t_0)\,\varphi(x_0+\xi,\ y_0+\eta,\ z_0+\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta -$$

$$-\int_0^{t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v(\xi, \eta, \zeta, \tau)\,f(x_0+\xi,\ y_0+\eta,\ z_0+\zeta,\ t_0-\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau,$$

где

$$v(\xi, \eta, \zeta, t) = \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{4\tau}}.$$

Эту формулу, как доказывается в курсах анализа, можно уже дифференцировать по параметру по крайней мере столько же раз, сколько ограниченных производных имеют функции f и φ, ибо интегралы от производных подинтегральной функции сходятся равномерно. Мы будем предполагать, что функции f и φ обладают необходимым числом непрерывных, ограниченных производных.

При $f(x, y, z, t) = 0$ формула (VIII.14) даёт:

$$u_1(x_0, y_0, z_0, t_0) =$$

$$= \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{t_0^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{4t_0}}\varphi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz, \qquad \text{(VIII.15)}$$

где через u_1 обозначено решение уравнения

$$\Delta u_1 - \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0,$$

удовлетворяющее условию

$$u_1|_{t=0} = \varphi(x, y, z).$$

Из леммы 4 следует, что правая часть есть функция, которая равномерно во всякой ограниченной области стремится к $\varphi(x_0, y_0, z_0)$ при $t_0 \to 0$. Кроме того, нетрудно убедиться, что интеграл этот можно сколько угодно раз дифференцировать по переменным x_0, y_0, z_0, t_0, если только $t_0 > 0$. Получим:

$$\Delta_0 u_1(x_0, y_0, z_0, t_0) - \frac{\partial u_1(x_0, y_0, z_0, t_0)}{\partial t_0} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\Delta_0 v - \frac{\partial v}{\partial t_0}\right)\varphi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

На основании леммы 1 (VIII) видим, что $u(x_0, y_0, z_0, t_0)$ удовлетворяет уравнению (VIII.1′) при $f(x, y, z, t) = 0$, что и требовалось доказать. Единственность гладких решений, т. е. решений, обладающих нужным числом непрерывных производных, вытекает прямо из тех рассуждений, которые привели нас к формуле (VIII.14). Итак, формула (VIII.14) при $f=0$ даёт решение задачи.

Остаётся показать, что второе слагаемое в формуле (VIII.14), то-есть функция

$$u_2(x_0, y_0, z_0, t_0) = -\int_0^{t_0}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} vf(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz\right\}dt$$

удовлетворяет уравнению (VIII.1) и условию $u_2|_{t_0}=0$.

Отсюда будет следовать, что функция будет удовлетворять уравнению (VIII.1) и начальному условию (VIII.2).

Введём вспомогательную функцию w, определив её при $t_0 > t$ по формуле

$$w(x_0, y_0, z_0, t_0, t) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} vf(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz.$$

Функция $w(x_0, y_0, z_0, t_0, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_0 w - \frac{\partial w}{\partial t_0} = 0$$

и условию

$$w|_{t_0=t} = -f(x_0, y_0, z_0, t).$$

Функция $u_2(x_0, y_0, z_0, t_0)$ может быть выражена через w соотношением

$$u_2(x_0, y_0, z_0, t_0) = \int_0^{t_0} w(x_0, y_0, z_0, t_0, t)\,dt.$$

По построению очевидно, что

$$u_2(x_0, y_0, z_0, 0) = 0.$$

Составим выражение

$$\Delta_0 u_2 - \frac{\partial u_0}{\partial t_0}.$$

Дифференцируя u_2 под знаком интеграла по x_0, y_0, z_0, получим

$$\Delta_0 u_2 = \int_0^{t_0} \Delta_0 w(x_0, y_0, z_0, t_0, t)\,dt.$$

Далее,

$$\frac{\partial u_0}{\partial t_0} = w(x_0, y_0, z_0, t_0, t)|_{t=0} + \int_0^{t_0} \frac{\partial w(x_0, y_0, z_0, t_0, t)}{\partial t_0}\,dt,$$

откуда

$$\Delta_0 u_2 - \frac{\partial u_2}{\partial t_0} = f(x, y, z, t),$$

что и требовалось доказать.

Вопрос о корректности постановки нашей задачи Коши сразу решается анализом формулы (VIII.14).

Очевидно, что малые изменения φ или f мало влияют на решение.

Мы вернёмся позднее к доказательству единственности решения задачи.

Пока что отметим одно важное обстоятельство.

Если свободный член уравнения (VIII.1) равен нулю (это означает отсутствие источников тепла), то решение задачи Коши, рассмотренное нами, есть функция, непрерывно дифференцируемая сколь угодно раз по x_0, y_0, z_0, вне зависимости от того, будет ли иметь производные функция φ или нет.

Эта гладкость решений существенно отличает уравнение распространения тепла, например, от уравнения колебаний струны, а значит, и от волнового уравнения.

В самом деле, уже решение Даламбера

$$u = \varphi(x - at)$$

уравнения колебаний струны может быть не дифференцируемо более двух раз по x и t. Эта же функция является решением и волнового уравнения с двумя и тремя независимыми переменными, так как, очевидно, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. Следовательно, решения этих уравнений также не более гладки, чём начальные условия.

Мы разобрали решение уравнения (VIII.1′) в пространстве трёх измерений. Совершенно аналогично можно было бы рассмотреть уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + f(x, y, t) \tag{VIII.20}$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + f(x, t). \tag{VIII.21}$$

Не останавливаясь на рассуждениях, которые в этом случае полностью совпадают с рассуждениями для трёхмерного случая, мы приведём окончательный результат.

Для уравнения (VIII.20) основное (фундаментальное) решение будет иметь вид:

$$v = \frac{1}{4\pi(t_0 - t)} e^{-\frac{r^2}{t_0 - t}}, \tag{VIII.22}$$

где $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, и решение уравнения (VIII.20) при условии

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x, y)$$

имеет вид:

$$u(x_0, y_0, t_0) = \frac{1}{4\pi t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{4t_0}} \varphi(x, y)\, dx\, dy -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_0^{t_0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t_0 - t} e^{-\frac{r^2}{4(t_0 - t)}} f(x, y, t)\, dx\, dy \right\} dt. \quad \text{(VIII.23)}$$

Точно так же для уравнения (VIII.21) основное решение будет иметь вид:

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0 - t}} e^{-\frac{(x - x_0)^2}{4(t_0 - t)}},$$

а решение уравнения (VIII.21) при условии $u\big|_{t=0} = \varphi(x)$ будет иметь вид:

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x - x_0)^2}{4t_0}} \varphi(x)\, dx -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_0} \frac{1}{\sqrt{t_0 - t}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x - x_0)^2}{4(t_0 - t)}} f(x, t)\, dx \right\} dt. \quad \text{(VIII.24)}$$

Проверить справедливость всех этих формул мы предоставляем читателю.

ЛЕКЦИЯ IX.

УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА.

§ 1. Теорема максимума.

Мы видели, что целый ряд вопросов математической физики сводится к решению тех или иных уравнений эллиптического типа. Мы займёмся сейчас простейшими такими уравнениями: уравнением Лапласа

$$\Delta u(x, y, z) = 0 \tag{IX.1}$$

и уравнением Пуассона

$$\Delta u(x, y, z) = -4\pi\rho(x, y, z). \tag{IX.2}$$

Всякая функция, имеющая непрерывные вторые производные и удовлетворяющая в некоторой области уравнению Лапласа, называется *гармонической* функцией в этой области.

Прежде чем переходить к решению задач, связанных с этими уравнениями, мы изучим некоторые общие свойства, которыми обладают решения этих уравнений.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Если функция* $\rho(x, y, z)$ *положительна в точке* (x_0, y_0, z_0), *лежащей внутри области, где определено уравнение* (IX.2), *то решение этого уравнения не может достигать минимума в этой точке.*

В самом деле, если бы в этой точке функция $u(x, y, z)$, удовлетворяющая уравнению (IX.2), достигала бы минимума, то $u(x, y, z)$ достигала бы минимума в этой точке по каждому переменному в отдельности.

Но тогда все первые производные от u должны были бы быть равными нулю в этой точке, а вторые производные по каждому переменному — неотрицательными. Следовательно, сумма вторых производных должна была бы быть также неотрицательной, что противоречит условию

$$\rho(x_0, y_0, z_0) > 0.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Если $\rho(x, y, z)$ отрицательна в точке (x_0, y_0, z_0), то $u(x, y, z)$ в этой точке не может достигать максимума.*

Доказывается переменой знака ρ и u.

Теорема 1. *Гармоническая функция, заданная в некоторой области Ω и непрерывная вплоть до границы S, нигде внутри Ω не может принимать значений бо́льших, чем наибольшее её значение на границе, или меньших, чем наименьшее её значение на границе.*

В самом деле, пусть

$$u(x_0, y_0, z_0) > u_S + \varepsilon,$$

где u_S есть значение u в произвольной точке границы области.

Тогда функция

$$v = u + \eta r^2,$$

где $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$, а η — некоторая положительная постоянная, будет при достаточно малом η принимать в точке (x_0, y_0, z_0) значение всё ещё большее, чем $\max v_S$.

В самом деле, $v(x_0, y_0, z_0) = u(x_0, y_0, z_0)$ и по предположению $u(x_0, y_0, z_0) > u_S + \varepsilon = v_S + \varepsilon - \eta r^2$. Выбрав η настолько малым, чтобы иметь во всей области Ω

$$\varepsilon - \eta r^2 > \frac{\varepsilon}{2},$$

мы получим:

$$v(x_0, y_0, z_0) > v_S + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, v будет достигать максимума где-то внутри области. Но

$$\Delta v = 6\eta.$$

В силу леммы 1 имеем противоречие. Вторая часть теоремы доказывается заменой u на $-u$. Позднее мы убедимся, что гармоническая функция, принимающая внутри области значение, равное её максимальному или минимальному значению на границе, есть постоянная.

Следствие 1. *Гармоническая функция, равная нулю на границе некоторой конечной области, тождественно равна нулю во всей области.*

Отсюда вытекает, что две гармонические функции, принимающие одинаковые значения в точках границы области, совпадают и всюду внутри области. В самом деле, их разность есть гармоническая функция, равная нулю на границе и, следовательно, тождественно равная нулю во всей области.

Следствие 2. *Если последовательность функций u_n, гармонических в области Ω и непрерывных вплоть до границы, сходится равномерно на границе S этой области, то она сходится равномерно во всей замкнутой области.*

Это вытекает из того, что разность

$$|u_{n_1}-u_{n_2}|, \quad \text{где} \quad n_1>N \quad \text{и} \quad n_2>N,$$

будучи сколь угодно малой на границе (при достаточно большом N), будет малой и внутри. Признак Коши даёт нам равномерную сходимость u_n во всей замкнутой области, что и требовалось доказать.

§ 2. Фундаментальное решение. Формула Грина.

Для того чтобы исследовать более глубоко свойства гармонических функций, докажем ещё несколько вспомогательных лемм.

Лемма 2. *Функция*

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\frac{1}{r}=0 \qquad \text{(IX.3)}$$

везде, кроме точки $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, *где* $\frac{1}{r}$ *обращается в бесконечность.*

В самом деле,

$$\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-x_0)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(y-y_0)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(z-z_0)^2}{r^5},$$

откуда и вытекает (IX.3).

Лемма 3. *Если функция u непрерывна, имеет непрерывные производные 1-го и 2-го порядков везде в области Ω, причём первые производные непрерывны вплоть до границы, а вторые производные непрерывны внутри области, то имеет место формула:*

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{r}\Delta u\,d\Omega=\iint\limits_{S}\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS-4\pi u(x_0, y_0, z_0). \qquad \text{(IX.4)}$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial n}$, как обычно, обозначает производную по внутренней нормали к поверхности S. Граница S области Ω удовлетворяет условиям § 1 лекции I, то-есть является кусочно-гладкой и пересекается с любой прямой, параллельной какой-либо из осей координат, или в конечном числе точек или по конечному числу целых отрезков.

Будем сначала предполагать, что u всюду, вплоть до границы S области Ω, имеет непрерывные производные 2-го порядка. Для доказательства вырежем из области Ω шар ω радиуса ε с центром в точке (x_0, y_0, z_0) и применим к оставшейся области формулу Грина. Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{r}\,\Delta u\,d\Omega = \lim_{\varepsilon\to 0} \iiint\limits_{\Omega-\omega} \frac{1}{r}\,\Delta u\,d\Omega = \lim_{\varepsilon\to 0} \iiint\limits_{\Omega-\omega} \left(\frac{1}{r}\,\Delta u - u\Delta\,\frac{1}{r}\right) d\Omega =$$

$$= \iint\limits_{S} \left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS + \lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{\sigma} \left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS, \qquad \text{(IX.5)}$$

где σ — поверхность шара ω.

Нетрудно видеть, что на поверхности σ

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{d\frac{1}{r}}{dr} = -\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{\varepsilon^2},$$

и, следовательно,

$$\iint\limits_{\sigma} u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS = -\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\sigma} u\,dS =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\sigma} u(x_0, y_0, z_0)\,dS - \frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\sigma} \eta\,dS,$$

где η стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$, т. е.

$$|\eta| < \delta(\varepsilon), \quad \text{где} \quad \delta(\varepsilon)\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0;$$

$$\iint\limits_{\sigma} u(x_0, y_0, z_0)\,dS = 4\pi\varepsilon^2 u(x_0, y_0, z_0); \quad \left|\iint\limits_{\sigma} \eta\,dS\right| \leqslant \delta(\varepsilon)\,4\pi\varepsilon^2.$$

В силу ограниченности $\frac{\partial u}{\partial n}$ имеем $\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| < k$, и, следовательно,

$$\left|\iint\limits_{\sigma} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{\sigma} k\,dS \leqslant 4\pi k\varepsilon$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{\sigma} \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,u\,dS = -4\pi u(x_0, y_0, z_0).$$

Подставляя это выражение в (IX.5), получим нужную формулу (IX.4).

Для того чтобы избавиться от предположения о том, что вторые производные от u непрерывны вплоть до границы, заменим область Ω

областью Ω_1, лежащей вместе с границей внутри Ω. Применяя сначала формулу (IX.4) к области Ω_1 и переходя затем к пределу при $\Omega_1 \to \Omega$, получим требуемый результат. Формула (IX.4) выведена в предположении, что точка (x_0, y_0, z_0) принадлежит области Ω. Если же точка (x_0, y_0, z_0) лежит вне Ω, то формула (IX.4) записывается так:

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u \, d\Omega = \iint\limits_{S} \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS. \tag{IX.6}$$

В этом легко убедиться, повторив весь вывод и заметив, что при этом не придётся вводить интеграл по области σ. Название формулы Грина часто относят к формулам (IX.4) и (IX.6).

Весь вывод, проведённый нами, без труда переносится и на случай, когда в области имеется конечное число точек разрыва производных, удовлетворяющих условиям теоремы.

Легко заметить аналогию между формулой Грина (IX.4) и сходной формулой (VIII.14), выведенной нами для уравнения теплопроводности. Роль рассмотренного там фундаментального решения уравнения теплопередачи играет здесь *функция* $\frac{1}{r}$, *которую называют фундаментальным решением уравнения Лапласа.*

§ 3. Потенциалы объёма, простого слоя и двойного слоя.

Если бы нам были известны, из каких-либо соображений, значения u, Δu и $\frac{\partial u}{\partial n}$, входящие в формулу Грина (IX.4):

$$\Delta u = -4\pi\rho, \quad u \Big|_S = f_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = f_2,$$

то формула Грина дала бы нам явное представление для неизвестной функции u:

$$u = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho}{r} \, dx\,dy\,dz + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} f_1 \, dS - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S} \frac{1}{r} f_2 \, dS. \tag{IX.7}$$

Однако мы не можем задать произвольно f_1 и f_2, и поэтому формула (IX.7) не даёт возможности строить решение уравнения (IX.2) по произвольным предельным значениям на границе его самого и его нормальной производной, подобно тому, как мы делали это при решении задачи о колебании струны. Мы дадим особые названия интегралам, стоящим в правой части этой формулы.

Интеграл $\iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho}{r} \, dx\,dy\,dz$ мы будем называть ньютоновым потенциалом, а функцию ρ — плотностью этого потенциала. Аналогично

$\int\limits_S\int \frac{f_2}{r}\,dS$ мы назовём потенциалом простого слоя с плотностью f_2, а $\int\limits_S\int f_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,dS$ — потенциалом двойного слоя с плотностью f_1.

Ньютонов потенциал имеет очень простой физический смысл. Представим себе некоторую массу, распределённую в объёме Ω с плотностью ρ. Подсчитаем притяжение этой массой материальной точки. По закону Ньютона масса m, расположенная в точке (x, y, z), притягивает единичную массу, расположенную в точке (x_0, y_0, z_0) с силой F, направленной к точке (x, y, z) и равной $\frac{m}{r^2}$. Иначе говоря,

$$F = \operatorname{grad}_0 U, \text{ где } U = \frac{m}{r} = \frac{m}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}.$$

Функция U, градиент которой равен притягивающей силе, называется потенциалом силы тяжести. Поэтому $\frac{m}{r}$ можно назвать ньютоновым потенциалом материальной точки (x, y, z) с массой m.

Разбивая весь объём Ω на малые элементы и заменяя влияние массы $\rho\,\Delta\Omega$, сосредоточенной в каждом таком объёме, влиянием равной массы, сосредоточенной в некоторой средней точке, мы получим выражение для силы F, действующей на единичную массу, сосредоточенную в точке (x_0, y_0, z_0), в виде

$$F = \sum \operatorname{grad}_0 \frac{1}{r_\xi}\,\rho\,\Delta\Omega,$$

где $\operatorname{grad}_0 \frac{1}{r_\xi}$ является значением $\operatorname{grad}_0 \frac{1}{r}$ в некоторой средней точке объёма $\Delta\Omega$.

Переходя к пределу, получим:

$$F = \int\int\limits_\Omega\int \rho \operatorname{grad}_0 \frac{1}{r}\,d\Omega, \qquad F_y = \int\int\limits_\Omega\int \rho\frac{y-y_0}{r^3}\,d\Omega,$$

$$F_x = \int\int\limits_\Omega\int \rho\frac{x-x_0}{r^3}\,d\Omega, \qquad F_z = \int\int\limits_\Omega\int \rho\frac{z-z_0}{r^3}\,d\Omega.$$

Пусть $\rho(x, y, z)$ — непрерывная функция. Величины F_x, F_y, F_z представляются равномерно сходящимися интегралами и в силу теоремы § 2 (VII) суть производные соответственно по x_0, y_0, z_0 от функции $U = \int\int\limits_\Omega\int \frac{\rho}{r}\,d\Omega$ и, следовательно,

$$F = \operatorname{grad}_0 U.$$

Таким образом, U оказывается потенциалом тяготения массы, распределённой с плотностью ρ в объёме Ω.

Ту же интерпретацию допускает и потенциал простого слоя. Это есть потенциал тяготения масс, распределённых на поверхности S, создаваемый в точках вне поверхности. Если ρ — плотность этих масс, то, заменяя действие каждого куска ΔS поверхности в точке (x_0, y_0, z_0) через $\operatorname{grad}_0 \frac{1}{r_\xi} f_2 \Delta S$, где $\operatorname{grad}_0 \frac{1}{r_\xi}$ обозначает значение $\operatorname{grad}_0 \frac{1}{r}$ в некоторой средней точке, суммируя по всем ΔS и переходя к пределу, получим для силы тяготения в точке (x_0, y_0, z_0) выражение $F = \operatorname{grad}_0 U$, $U = \int\limits_S\int \frac{f_2}{r} dS$, что и требовалось доказать.

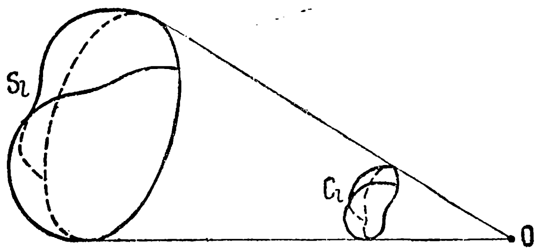
Мы считали ρ и f_2 плотностью масс, тяготеющих по закону Ньютона, но так же можно было бы провести вывод выражения для электрического потенциала, создаваемого зарядами, притягивающимися по закону Кулона, или магнитного потенциала.

Перейдём к выяснению геометрического смысла потенциала двойного слоя. Наша задача будет состоять в том, чтобы представить этот интеграл в несколько иной форме.

Рассмотрим некоторую, вообще говоря, незамкнутую поверхность S.

Возьмём некоторую точку O и построим вокруг этой точки сферу C радиуса 1.

Допустим, что поверхность S двусторонняя, и назовём одну из её сторон внутренней, а другую внешней и тем самым определим направление внутренней нормали во всех точках поверхности.



Черт. 11.

Пусть эта поверхность разбита на конечное число кусков таким образом, чтобы каждый кусок или встречался с радиус-векторами, проведёнными из точки O, не больше, чем в одной точке, или же являлся куском конической поверхности с вершиной в точке O.

Для каждого такого куска знак косинуса угла между внутренней нормалью и радиус-вектором, проведённым из O, будет постоянным. Пусть эти куски будут $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Проведём радиус-векторы в каждую точку куска S_l. Эти радиусы в пересечении со сферой C образуют на ней область C_l (черт. 11).

Площадь этой области мы будем называть телесным углом, под которым внутренняя поверхность куска S_l видна из начала координат, и обозначать ω_{S_l}. Мы будем считать этот телесный угол положительным, если радиус-векторы, направленные из начала в точку S_l, пересекаются с внутренней нормалью под тупым углом, т. е. если наблюдатель, стоящий в начале координат, действительно видит внутреннюю поверхность, и будем считать, что этот угол отрицателен, если наблюдатель видит внешнюю поверхность, и угол между радиус-вектором из начала и внутренней нормалью S_l — острый.

Для кусков конических поверхностей с вершиной в точке O телесный угол примем равным нулю.

Телесный угол для куска S_l будет, очевидно, в полярных координатах с вершиной в точке O записываться так:

$$\omega_{S_l} = -\iint\limits_{S_l} \operatorname{sign}[\cos(r, n)] \sin\theta \, d\theta \, d\varphi, \tag{IX.8}$$

где $\operatorname{sign}[\cos(r, n)]$ обозначает знак косинуса угла между радиус-вектором r и внутренней нормалью n.

Для всей поверхности S мы определим телесный угол ω, под которым видна её внутренняя сторона из начала, как сумму соответственных телесных углов для всех кусков S_l.

Этот угол будет выражаться интегралом

$$\omega_S = -\iint\limits_{S} \operatorname{sign}[\cos(r, n)] \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Мы можем теперь сформулировать нашу лемму.

Лемма 4. *Имеет место формула*

$$\omega_S = \iint\limits_{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS. \tag{IX.9}$$

Для доказательства заметим, что ω_S зависит только от контура, ограничивающего поверхность S, и не меняется при любых деформациях поверхности S, лишь бы контур l оставался неизменным и поверхность S в процессе её деформации не проходила через начало координат.

Интеграл (IX.9) также не зависит от поверхности S при указанных деформациях. В самом деле, разность интегралов

$$\iint\limits_{S_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS - \iint\limits_{S_2} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS,$$

где S_1 и S_2 имеют общий контур, есть интеграл по замкнутой поверхности S.

Так как, по предположению, точка O находится вне области, ограниченной поверхностью S, по формуле Грина имеем:

$$\iint\limits_{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = -\iiint\limits_{\Omega} \Delta\left(\frac{1}{r}\right) d\Omega = 0,$$

ибо $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$.

Чтобы убедиться теперь в справедливости (IX.9), достаточно показать совпадение ω_S и интеграла (IX.9) для какого-нибудь одного типа поверхности S, ограниченной контуром l.

Возьмём, например, поверхность, состоящую из куска сферы C и куска L конической поверхности, составленной радиус-векторами, проходящими через начало и контур l. Для обоих этих кусков справедливость (IX.9) очевидна, ибо на L имеет место равенство $\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = 0$ вместе с равенством нулю телесного угла, а на C

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{d \frac{1}{r}}{dr} = -\operatorname{sign}[\cos(r, n)],$$

и поэтому

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = -\operatorname{sign}[\cos(r, n)] \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Можно было бы установить справедливость (IX.9) и просто непосредственной выкладкой.

На основании совпадения интегралов (IX.8) и (IX.9) по любой поверхности легко заключаем, что

$$-\operatorname{sign}[\cos(r, n)] \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS.$$

Мы будем обозначать иногда выражение

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS \qquad \text{(IX.10)}$$

через $d\omega$ и называть $d\omega$ элементом телесного угла.

С помощью формулы (IX.10) потенциалу двойного слоя можно дать представление

$$\iint_S f_1 \, d\omega. \qquad \text{(IX.11)}$$

Это представление говорит о том, что если плотность f_1 потенциала двойного слоя равна единице, то этот потенциал выражает телесный угол, под которым видна поверхность S из точки (x_0, y_0, z_0).

ЛЕКЦИЯ X.

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ ФОРМУЛЫ ГРИНА.

§ 1. Теорема о среднем арифметическом.

Формула Грина (IX.4) в случае, когда u — гармоническая функция, принимает вид:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \int \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \qquad (X.1)$$

Эта формула, как мы видели, справедлива всегда, если функция имеет производные первого порядка, непрерывные вплоть до границы, и производные второго порядка, непрерывные внутри области.

Правая часть формулы (X.1) представляет собой сумму потенциалов простого и двойного слоя.

Их свойства будут подробно исследованы в дальнейшем. Покажем сейчас, что каждый из них есть гармоническая функция везде вне поверхности S.

В самом деле, если точка (x_0, y_0, z_0) не лежит на этой поверхности, то потенциалы простого и двойного слоя можно дифференцировать, и притом сколько угодно раз, по переменным x_0, y_0, z_0 под знаком интеграла. Поскольку $\frac{1}{r}$ есть гармоническая функция этих переменных, ибо, как мы видели, $\Delta_0 \frac{1}{r} = 0$, то и потенциал простого слоя и потенциал двойного слоя будут гармоническими функциями вне S. Более того, функцию $\frac{1}{r}$ вблизи некоторой точки x_0^*, y_0^*, z_0^* можно разложить в ряд по степеням $x_0 - x_0^*$, $y_0 - y_0^*$, $z_0 - z_0^*$, равномерно сходящийся при достаточно малых по абсолютной величине значениях этих разностей.

В самом деле,

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{[(x-x_0^*)-(x_0-x_0^*)]^2+[(y-y_0^*)-(y_0-y_0^*)]^2+[(z-z_0^*)-(z_0-z_0^*)]^2}}=$$

$$=\Big\{[(x-x_0^*)^2+(y-y_0^*)^2+(z-z_0^*)^2]\times$$

$$\times\Big[1-2\frac{(x-x_0^*)(x_0-x_0^*)+(y-y_0^*)(y_0-y_0^*)+(z-z_0^*)(z_0-z_0^*)}{(x-x_0^*)^2+(y-y_0^*)^2+(z-z_0^*)^2}+$$

$$+\frac{(x_0-x_0^*)^2+(y_0-y_0^*)^2+(z_0-z_0^*)^2}{(x-x_0^*)^2+(y-y_0^*)^2+(z-z_0^*)^2}\Big]\Big\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Применяя к этому выражению разложение в ряд по формуле бинома Ньютона, легко убедиться в том, что этот ряд будет равномерно сходиться при значениях $(x_0-x_0^*)^2+(y_0-y_0^*)^2+(z_0-z_0^*)^2$, достаточно малых по сравнению с минимумом выражения

$$(x-x_0^*)^2+(y-y_0^*)^2+(z_0-z_0^*)^2,$$

когда точка (x, y, z) пробегает поверхность S.

Интегрируя этот ряд почленно, убеждаемся, что функции $v=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\frac{1}{r}\,dS$ и $w=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}dS$ допускают такое разложение и, следовательно, являются аналитическими функциями x_0^*, y_0^*, z_0^* везде, кроме поверхности S.

Пусть u — гармоническая функция в шаре, непрерывная с первыми производными вплоть до границы.

Применим формулу Грина (X.I) к шару радиуса h, описанному вокруг точки (x_0, y_0, z_0), поверхность которого мы также обозначим буквой S. Мы получим:

$$u(x_0, y_0, z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left(\frac{1}{h^2}u-\frac{1}{h}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS,$$

Но при любой замкнутой поверхности S_1

$$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint\limits_\Omega \Delta u\,dx\,dy\,dz=0,$$

где Ω_1 — объём, ограниченный поверхностью S_1, а функция u гармонична внутри Ω_1 и имеет непрерывные производные вплоть до границы.

Следовательно.

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi h^2} \int\int_S u\,dS = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} u(R, \vartheta, \varphi) \sin\vartheta\,d\varphi, \quad (X.2)$$

где ϑ и φ — сферические координаты.

Отсюда следует

Теорема 1. *Значение гармонической функции в центре некоторого шара равно среднему арифметическому её значений на поверхности этого шара.*

Свойство гармонических функций, доказанное нами, вполне характеризует этот класс функций. Справедлива следующая

Теорема 2. *Если функция $u(x, y, z)$, непрерывная в области Ω, обладает тем свойством, что её значение в центре любого шара, лежащего целиком внутри Ω, равно среднему арифметическому её значений на поверхности шара, то эта функция имеет непрерывные производные 2-го порядка и*

$$\Delta u = 0,$$

т. е. $u(x, y, z)$ есть гармоническая функция.

Доказательство этой теоремы мы проведём позднее. Пока укажем некоторые свойства функций, удовлетворяющих условию теоремы 2.

Лемма 1. *Непрерывная функция $u(x, y, z)$, обладающая тем свойством, что её значения в центре любого шара, заключённого в области её определения, равны среднему арифметическому её значений на поверхности шара, не может иметь внутри области ни минимума, ни максимума, если она не сводится к постоянной.*

В самом деле, если бы в какой-либо точке P_0 внутри области Ω функция u принимала максимальное значение, то среднее арифметическое её значений на поверхности малой сферы σ, окружающей точку P_0, могло равняться $u(P_0)$ только в том случае, если бы везде на поверхности σ функция u равнялась своему максимальному значению. Это означало бы, что функция u постоянна на шаре σ. Но если функция u постоянна на любом шаре, окружающем какую-нибудь точку, где она принимает максимальное значение, то она, как легко видеть, должна быть постоянной всюду в области Ω. Действительно, соединим точку P_0 с произвольной внутренней точкой P при помощи какой-либо гладкой кривой l, лежащей целиком внутри Ω. При этом минимум расстояния от произвольной точки линии l до границы области, существующий в силу теоремы Вейерштрасса, будет положительным. Следовательно, существует такое положительное число η, что шар радиуса η, описанный вокруг любой точки линии l, будет лежать целиком внутри Ω. На линии l можно указать конечное число точек

$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n = P$, обладающих тем свойством, что каждая последующая лежит внутри шара радиуса η, описанного вокруг предыдущей. Пользуясь доказанным свойством постоянства u на любой внутренней сфере, окружающей всякую точку, где u принимает максимальное значение, и переходя последовательно от одной вершины ломаной к другой, получим

$$u(P) = u(P_0).$$

Лемма 2. *Если функция $u(x, y, z)$, удовлетворяющая условию предыдущей леммы, обращается в нуль на границе некоторой области Ω, то она тождественно равна нулю в этой области.*

В самом деле, если бы функция u принимала в области Ω значения, отличные от нуля, то она принимала бы наибольшее или наименьшее значение внутри области, не будучи постоянной, что невозможно в силу леммы 1.

Лемма 3. *Если функция $u(x, y, z)$, удовлетворяющая условиям леммы 1, на какой-нибудь замкнутой поверхности S совпадает с гармонической функцией u_0, то она совпадает с этой гармонической функцией всюду внутри области, ограниченной S, и, значит, сама является гармонической.*

Действительно, разность $u - u_0$ будет в свою очередь удовлетворять условиям леммы 1, так как ему удовлетворяют порознь u и u_0. С другой стороны, эта разность обращается в нуль на S. По предыдущей лемме $u - u_0 = 0$ везде в области Ω.

В дальнейшем мы покажем, что какова бы ни была непрерывная функция $f(S)$, заданная на поверхности шара, существует гармоническая функция u, непрерывная в замкнутом шаре и равная $f(S)$ в точках границы. Отсюда будет непосредственно следовать теорема 2. В самом деле, для всякой внутренней сферы σ в области Ω существует функция u_0, гармоническая внутри сферы σ и принимающая на ней такие же значения, что и u. В силу леммы 3 u совпадает с u_0. Значит, u гармонична во всяком внутреннем шаре и, тем самым, во всякой внутренней точке Ω, что и требовалось доказать.

Из формулы (X.2) вытекает следующая теорема:

Теорема 3. *Если последовательность $\{v_n\}$ функций, гармонических в области Ω, сходится равномерно в этой области к предельной функции v, то этот предел есть в свою очередь гармоническая функция.*

В самом деле, если каждая из функций v_n удовлетворяет равенству

$$v_n(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi h^2} \int\limits_S \int v_n \, dS,$$

где S — сфера радиуса $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = h$, то этому же равенству удовлетворяет и предельная функция.

Следовательно, v — гармоническая функция в Ω, что и требовалось доказать. Отсюда следует, между прочим, что если гармоническая функция $v(x, y, z, \lambda)$ непрерывно зависит от параметра λ в конечном промежутке $a \leqslant \lambda \leqslant b$, то и интеграл от v по параметру λ, взятый по этому промежутку, также представляет собой гармоническую функцию.

§ 2. Поведение гармонической функции вблизи особой точки.

Пусть функция u имеет особую точку в области Ω, но в окрестности этой особой точки является гармонической. Исследуем её поведение вблизи такой особой точки. Для простоты предположим, что этой точкой служит начало координат. Преобразуем функцию u к полярным координатам, тогда $u = u(R, \vartheta, \varphi)$.

Лемма 4. *Если функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет неравенствам:*

$$|u| \leqslant \frac{A}{R^n}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial R}\right| \leqslant \frac{A}{R^{n+1}},$$

где A — постоянная, а $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, и является гармонической функцией в Ω за исключением начала координат, то функция $u(x, y, z)$ в Ω допускает представление

$$u(x_0, y_0, z_0) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i+j+k=m} a_{ijk} \frac{\partial^m \frac{1}{R}}{\partial x_0^i \, \partial y_0^j \, \partial z_0^k} + u^*(x_0, y_0, z_0), \tag{X.3}$$

где u^* — функция, гармоническая во всей области Ω, включая точку $(0, 0, 0)$.

Доказательство этого факта следует непосредственно из формулы Грина (X.1). Окружив точку $(0, 0, 0)$ малой сферой σ с центром в начале, получим:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} u - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + \frac{1}{4\pi} \int\limits_\sigma \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} u - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

Вблизи точки $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ функцию $\frac{1}{r}$ по формуле Маклорена можно представить в виде

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_0} + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{i+j+k=m} \frac{1}{i!\,j!\,k!} x^i y^j z^k \left. \frac{\partial^m \frac{1}{r}}{\partial x^i \, \partial y^j \, \partial z^k} \right|_0 + R_n,$$

где значения производных берутся в точке $x = y = z = 0$, $R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$, сфера σ взята настолько малой, что точка

(x_0, y_0, z_0) лежит вне её, причём $|R_n| < CR^n$, где C — постоянная. Пользуясь тем, что

$$\left.\frac{\partial^m \frac{1}{r}}{\partial x^i\, \partial y^j\, \partial z^k}\right|_0 = (-1)^m \frac{\partial^m \frac{1}{R_0}}{\partial x_0^i\, \partial y_0^j\, \partial z_0^k},$$

получим:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_0} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^m}{i!j!k!} x^i y^j z^k \frac{\partial^m \frac{1}{R_0}}{\partial x_0^i\, \partial y_0^j\, \partial z_0^k} + R_n. \qquad \text{(X.4)}$$

Аналогично $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$ также представляется линейной комбинацией производных от $\frac{1}{R_0}$ по x_0, y_0, z_0 до порядка $n-1$ с коэффициентами, не зависящими от x_0, y_0, z_0 и остатком R_n', для которого справедливо неравенство $|R_n'| < C_1 R^{n-1}$. Это следует из того, что производные от $\frac{1}{r}$ по x, y, z отличаются лишь знаком от производных по x_0, y_0, z_0, а для этих производных искомое представление очевидно. Но

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos(nx)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(ny)\frac{\partial}{\partial y} + \cos(nz)\frac{\partial}{\partial z},$$

где $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ не зависят от x_0, y_0, z_0 и ограничены. Отсюда получим:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} u - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS + \frac{a_0^{(\sigma)}}{R_0} + $$
$$+ \sum_{m=1}^{n-1} a_{ijk}^{(\sigma)} \frac{\partial^m \frac{1}{R_0}}{\partial x_0^i\, \partial y_0^j\, \partial z_0^k} + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_\sigma \left(R_n' u - R_n \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS,$$

где $a_{ijk}^{(\sigma)}$ — некоторые числа.

Перейдём к пределу, когда σ стягивается в точку $x = y = z = 0$. Предел интеграла, взятого по σ, будет в силу условий леммы равен нулю, а первое слагаемое правой части есть гармоническая функция от x_0, y_0, z_0, не зависящая от σ (сумма потенциалов простого и двойного слоя).

Отсюда следует, что и сумма

$$\frac{a_0^{(\sigma)}}{R_0} + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{i+j+k=1} a_{ijk}^{(\sigma)} \frac{\partial^m \frac{1}{R_0}}{\partial x_0^i\, \partial y_0^j\, \partial z_0^k}$$

должна стремиться к некоторому пределу $\Phi(x_0, y_0, z_0) = \Phi(P_0)$. Докажем, что этот предел должен выражаться в виде

$$\frac{a_0}{R_0} + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{i+j+k=m} a_{ijk} \frac{\partial^m \frac{1}{R_0}}{\partial x_0^i \partial y_0^j \partial z_0^k}.$$

Для этого достаточно доказать следующую лемму:

Лемма 5. *Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ — некоторые функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (k — конечное число). Если линейная комбинация этих функций с переменными коэффициентами, не зависящими от $x_1, x_2, \ldots, x_n$:*

$$\varphi^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} y_i^{(m)} \varphi_i(x_1, \ldots, x_n),$$

сходится при $m \to 0$, то её предел $\varphi^{(0)}$ есть снова линейная комбинация тех же функций φ_i.

В самом деле, функция $\varphi^{(m)}$ не может, очевидно, принимать независимые произвольные значения во всём пространстве, так как, приписывая ей какое-либо значение в некоторой точке $P_0^{(s)}$, мы получим некоторое линейное уравнение, которому должны удовлетворять числа $y_1^{(m)}$.

Число таких линейно независимых уравнений не больше, чем k; поэтому можно указать N таких точек $P_0^{(1)}, \ldots, P_0^{(N)}$ $(N \leqslant k)$, что значение функции $\varphi^{(m)}$ в любой точке P определяется вполне через эти значения:

$$\varphi^{(m)}(P) = \sum_{s=1}^{N} \varphi^{(m)}(P_0^{(s)}) \psi_s(P), \tag{X.5}$$

где $\psi_s(P)$ — линейные комбинации φ_i с числовыми коэффициентами.

Обратно, всякая функция, удовлетворяющая уравнению (X.9), представима в виде линейной комбинации φ_i.

Отсюда следует наша лемма. Если перейти к пределу в равенстве (X.9), то мы видим, что $\varphi^{(0)}$ должна удовлетворять уравнению

$$\varphi^{(0)}(P) = \sum_{s=1}^{N} \varphi^{(0)}(P_0^{(s)}) \psi_s(P),$$

и, значит, $\varphi^{(0)}$ есть линейная комбинация $\varphi_i(P)$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Представление* (X.5) *имеет место, если удовлетворено неравенство*

$$|u| \leqslant \frac{A}{R^n}.$$

Введём вместо $u(R, \vartheta, \varphi)$ вспомогательную функцию

$$v(R, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{R^{n+1}} \int_0^R u(R_1, \vartheta, \varphi) R_1^n \, dR_1; \tag{X.6}$$

интеграл в правой части сходится. Его можно представить в виде:

$$v(R, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{R^{n+1}} \int_0^1 u(R\xi, \vartheta, \varphi) R^n \xi^n \, d(R\xi) =$$

$$= \int_0^1 u(R\xi, \vartheta, \varphi) \xi^n \, d\xi = \int_0^1 u(\xi x, \xi y, \xi z) \xi^n \, d\xi.$$

Как легко убедиться непосредственным дифференцированием, подынтегральное выражение в последнем интеграле является гармонической функцией переменных (x, y, z); отсюда следует, согласно теореме 3 из § 1, что и v является гармонической функцией.

Очевидно,

$$\frac{\partial v(R, \vartheta, \varphi)}{\partial R} = -\frac{n+1}{R^{n+2}} \int_0^R u(R_1, \vartheta, \varphi) R_1^n \, dR_1 + \frac{u(R, \vartheta, \varphi)}{R}. \tag{X.7}$$

Из формул (X.10) и (X.11) следует:

$$|v| \leqslant \frac{1}{R^{n+1}} \int_0^R A \, dR_1 = \frac{A}{R^n},$$

$$\left| \frac{\partial v}{\partial R} \right| \leqslant \frac{n+1}{R^{n+2}} \int_0^R A \, dR_1 + \frac{A}{R^{n+1}} = \frac{A(n+2)}{R^{n+1}}.$$

Следовательно, к функции v применимы все условия леммы 4, и v представима в виде

$$v = \frac{a_0}{R_0} + \sum_{m=1}^{n-1} a_{ijk} \frac{\partial^m \frac{1}{R_0}}{\partial x_0^i \, \partial y_0^j \, \partial z_0^k} + w(R_0, \vartheta, \varphi),$$

где w — гармоническая в окрестности начала координат функция.

Функция u может быть получена из v с помощью простых выкладок:

$$u(R, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{R^n} \frac{\partial}{\partial R} [R^{n+1} v(R, \vartheta, \varphi)] =$$

$$= (n+1) v(R, \vartheta, \varphi) + x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Принимая во внимание, что $\psi_{ijk} = \dfrac{\partial^m \frac{1}{R}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}$ есть однородная функция измерения — $(m+1)$, следовательно

$$x\frac{\partial\psi_{ijk}}{\partial x} + y\frac{\partial\psi_{ijk}}{\partial y} + z\frac{\partial\psi_{ijk}}{\partial z} = -(m+1)\psi_{ijk},$$

и замечая, что выражение $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} + z\dfrac{\partial w}{\partial z}$ при гармонической функции w является гармонической функцией (это легко проверить непосредственным дифференцированием), убеждаемся в справедливости нашей теоремы.

Следствие. *Если в окрестности начала координат функция $u(x, y, z)$ ограничена и является гармонической везде, кроме, быть может, начала, то её можно превратить в гармоническую, выбрав соответственым образом* $u(0, 0, 0)$.

Функция u в окрестности начала совпадает с гармонической функцией w. Следовательно, она может не быть гармонической лишь потому, что $u(0, 0, 0)$ не равно $w(0, 0, 0)$, отсюда и вытекает наше утверждение. Очевидно, что роль начала координат может играть любая точка.

§ 3. Поведение гармонической функции на бесконечности. Взаимносопряжённые точки.

Функция $\dfrac{1}{r}$ может быть преобразована к некоторому виду, весьма удобному в дальнейшем. Займёмся этим преобразованием:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2(xx_0+yy_0+zz_0)+x_0^2+y_0^2+z_0^2}} =$$

$$= \frac{1}{RR_0}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R_0^2} - 2\dfrac{xx_0+yy_0+zz_0}{R^2R_0^2} + \dfrac{1}{R^2}}},$$

где

$$R^2 = x^2+y^2+z^2, \quad R_0^2 = x_0^2+y_0^2+z_0^2.$$

Отсюда

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{RR_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{x}{R^2}-\dfrac{x_0}{R_0^2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{R^2}-\dfrac{y_0}{R_0^2}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{R^2}-\dfrac{z_0}{R_0^2}\right)^2}}.$$

Обозначим

$$\frac{x}{R^2} = \xi, \quad \frac{y}{R^2} = \eta, \quad \frac{z}{R^2} = \zeta,$$

$$\frac{x_0}{R_0^2} = \xi_0, \quad \frac{y_0}{R_0^2} = \eta_0, \quad \frac{z_0}{R_0^2} = \zeta_0.$$

Точку (ξ, η, ζ) мы будем называть сопряжённой с точкой (x, y, z) относительно единичной сферы. Нетрудно видеть, что

$$\mathrm{P}^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{R^2},$$

$$x = \frac{\xi}{\mathrm{P}^2}, \quad y = \frac{\eta}{\mathrm{P}^2}, \quad z = \frac{\zeta}{\mathrm{P}^2}.$$

Таким образом, свойство сопряжённости является взаимным: если точка (ξ, η, ζ) является сопряжённой для точки (x, y, z), то, обратно, точка (x, y, z) является сопряжённой для точки (ξ, η, ζ).

Точка, сопряжённая с данной, лежит на луче, проходящем через начало и данную точку, на расстоянии от начала, обратном расстоянию данной.

Обозначая

$$\rho = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2},$$

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \mathrm{P},$$

$$\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2} = \mathrm{P}_0,$$

получим:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{RR_0}\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{P}\mathrm{P}_0}{\rho}. \tag{X.8}$$

Из этой формулы вытекает важная для применений

Теорема 5. *Если функция $u(R, \vartheta, \varphi)$ — гармоническая в некоторой области Ω переменных R, ϑ, φ, то и функция*

$$\frac{1}{\mathrm{P}} u\left(\frac{1}{\mathrm{P}}, \vartheta, \varphi\right) = v(\mathrm{P}, \vartheta, \varphi)$$

также гармоническая в соответствующей области Ω_1 переменных $\mathrm{P}, \vartheta, \varphi$, *получаемой из области Ω заменой $\mathrm{P} = \frac{1}{R}$. Иными словами, $\frac{1}{\mathrm{P}} u\left(\frac{1}{\mathrm{P}}, \vartheta, \varphi\right)$ есть гармоническая функция от ξ, η, ζ.*

В самом деле, по формуле Грина (X. 1) всякая гармоническая функция $u(x, y, z)$ представляется суммой потенциалов простого и двойного слоя

$$u(R_0, \vartheta_0, \varphi_0) = \int\limits_S\int \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS + \int\limits_S\int \nu \frac{1}{r} dS,$$

где

$$\mu = \frac{1}{4\pi} u\Big|_S, \quad \text{а} \quad \nu = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\mathrm{P}_0}u = R_0 u = \int_S\int \mu \frac{\partial \frac{R_0}{r}}{\partial n}\,dS + \int_S\int \nu \frac{R_0}{r}\,dS; \tag{X.9}$$

но $\frac{R_0}{r} = \frac{1}{R\rho}$ есть гармоническая функция ξ_0, η_0, ζ_0, а значит, интегралы (X. 13) — также гармоническая функция этих переменных, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если гармоническая вне некоторого шара функция удовлетворяет неравенству*

$$|u| < AR^{n-1}, \tag{X.10}$$

то эта функция представима в виде:

$$u = a_0 + \sum_{m=1}^{n-1} a_{ijk} R^{2m+1} \frac{\partial^{i+j+k}\frac{1}{R}}{\partial x^i\,\partial y^j\,\partial z^k} + u^*, \tag{X.11}$$

$$i + j + k = m,$$

где u^* — гармоническая функция, стремящаяся к нулю на бесконечности.

В самом деле, если для u имеет место неравенство (X.10), то для функции $v(\mathrm{P}, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{\mathrm{P}} u\left(\frac{1}{\mathrm{P}}, \vartheta, \varphi\right)$ имеет место оценка

$$|v| < \frac{A}{\mathrm{P}^n}.$$

Но по доказанной ранее теореме 4 (X)

$$v(\mathrm{P}, \vartheta, \varphi) = \frac{a_0}{\mathrm{P}} + \sum_{m=1}^{n-1} a_{ijk} \frac{\partial^m \frac{1}{\mathrm{P}}}{\partial\xi^i\,\partial\eta^j\,\partial\zeta^k} + v^*(\mathrm{P}, \vartheta, \varphi). \tag{X.12}$$

Функция $\dfrac{\partial^m \frac{1}{\mathrm{P}}}{\partial\xi^i\,\partial\eta^j\,\partial\zeta^k}$ есть однородная функция измерения — $(m+1)$ от ξ, η, ζ. Следовательно,

$$\mathrm{P}^{m+1} \frac{\partial^m \frac{1}{\mathrm{P}}}{\partial\xi^i\,\partial\eta^j\,\partial\zeta^k}$$

есть однородная функция нулевого измерения от ξ, η, ζ и зависит только от отношений этих величин. Но ξ, η, ζ пропорциональны

x, y, z; следовательно,

$$\mathrm{P}^{m+1}\frac{\partial^m \frac{1}{\mathrm{P}}}{\partial\xi^i\,\partial\eta^j\,\partial\zeta^k}=R^{m+1}\frac{\partial^m \frac{1}{R}}{\partial x^i\,\partial y^j\,\partial z^k},$$

откуда

$$\frac{\partial^m \frac{1}{\mathrm{P}}}{\partial\xi^i\,\partial\eta^j\,\partial\zeta^k}=R^{2m+2}\frac{\partial^m \frac{1}{R}}{\partial x^i\,\partial y^j\,\partial z^k}. \tag{X.13}$$

Подставляя (X.13) в (X.12) и пользуясь тем, что $u=\frac{1}{R}v$, получим (X.11). Наше утверждение доказано.

Из формулы (X.11) вытекает одно важное следствие.

Следствие 2. *Функция $u(x, y, z)$, гармоническая вне шара и ограниченная там, стремится на бесконечности к определённому пределу.*

ЛЕКЦИЯ XI.

УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ. НЬЮТОНОВ ПОТЕНЦИАЛ.

Переходим к исследованию уравнения Пуассона в неограниченной среде.

Лемма 1. *Функция, гармоническая во всём пространстве и стремящаяся к нулю на бесконечности, есть тождественный нуль.*

В самом деле, применяя теорему 1 лекции IX к сколь угодно большому шару, видим, что в любой точке пространства значение нашей гармонической функции сколь угодно мало. Отсюда и вытекает наше утверждение.

Следствие 1. *Решение уравнения Пуассона*

$$\Delta v = -4\pi\rho(x, y, z) \qquad \text{(XI.1)}$$

в неограниченном пространстве, стремящееся к нулю на бесконечности, единственно.

В самом деле, если v_1 и v_2 — два таких решения, то их разность

$$v_1 - v_2$$

есть гармоническая функция, стремящаяся к нулю на бесконечности. По предыдущему она — тождественный нуль.

Следствие 2. (Теорема Лиувилля.) *Гармоническая функция, ограниченная во всём пространстве, равна постоянной.*

В самом деле, по следствию 2 теоремы 5 предыдущей лекции эта функция на бесконечности стремится к некоторому пределу c. Разность $u - c$, являясь гармонической функцией, будет стремиться на бесконечности к нулю и, следовательно, будет равна нулю везде, т. е. $u = c$ всюду, что и требовалось доказать.

Переходим теперь к решению уравнения Пуассона (XI. I) в неограниченном пространстве.

Пусть функция $\rho(x, y, z)$ интегрируема и удовлетворяет неравенствам

$$\left.\begin{aligned} |\rho(x, y, z)| &< \frac{A}{R^{2+\alpha}}, \text{ если } R \geqslant 1, \\ |\rho(x, y, z)| &< A, \quad \text{ если } R < 1, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XI.2)}$$

и

где

$$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \text{ и } \alpha > 0.$$

Без ограничения общности можно считать $\alpha < 1$, ибо в противном случае замена α на $\alpha_1 < \alpha$ только ослабит неравенство (XI.2).

При выполнении условий (XI. 2) решение уравнения (XI.1) легко построить с помощью формулы Грина (IX. 4). Пусть $u(x_0, y_0, z_0)$ — какое-нибудь решение (XI.1). Взяв произвольный объём Ω, ограниченный поверхностью S, мы имеем на основании этой формулы:

$$u(x_0, y_0, z_0)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}(-4\pi\rho)\frac{1}{r}\,dx\,dy\,dz+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}u\,dS-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}dS=$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho}{r}\,dx\,dy\,dz+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}u\,dS-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}dS, \quad \text{(XI.3)}$$

где r, как обычно, — расстояние между точкой (x, y, z) и точкой (x_0, y_0, z_0).

Возьмём за объём Ω шар радиуса R с центром в начале координат и устремим R к бесконечности. При этом первое слагаемое правой части (XI. 3) будет стремиться к определённому пределу, так как в силу условий (XI.2) объёмный интеграл сходится. Сумма двух других слагаемых представляет некоторую гармоническую функцию. Мы покажем далее, что предел первого слагаемого даёт решение поставленной задачи. В силу доказанной единственности решения отсюда будет следовать, что сумма второго и третьего слагаемых стремится к нулю.

Докажем, что функция

$$u(x_0, y_0, z_0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho}{r}\,dx\,dy\,dz, \quad \text{(XI.4)}$$

где тройной интеграл распространён на всё пространство, действительно удовлетворяет уравнению (XI.1) и поставленным условиям.

Функция (XI.4) называется ньютоновым потенциалом, а $\rho(x, y, z)$ — его плотностью, как это было уже определено в § 3 (IX).

Прежде всего займёмся исследованием условия на бесконечности. Оценивая (XI.4), будем иметь:

$$|u(x_0, y_0, z_0)| \leqslant A\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{rR^{2+\alpha}}\,dx\,dy\,dz.$$

Переходя к оценке последнего интеграла, заметим, что величина его зависит только от $R_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$, и если положить $x_0=R_0$, $y_0=0$, $z_0=0$, то она не изменится. В самом деле, очевидно, этот интеграл не меняется при повороте координатных осей, и можно выбрать эти координатные оси так, чтобы ось OX проходила через точку (x_0, y_0, z_0). Делая теперь замену переменных

$$x=R_0\xi, \quad y=R_0\eta, \quad z=R_0\zeta,$$

приведём его к виду

$$A\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R_0^3\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{R_0^{3+\alpha}\mathrm{P}^{2+\alpha}\mathrm{P}_1}=\frac{A}{R_0^\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\mathrm{P}_1\mathrm{P}^{2+\alpha}},$$

где $\mathrm{P}=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, $\mathrm{P}_1=\sqrt{(\xi-1)^2+\eta^2+\zeta^2}$. Последний интеграл сходится, ибо: 1) при $\mathrm{P}\to\infty$ подинтегральное выражение убывает, как $\frac{1}{\mathrm{P}^{3+\alpha}}$; 2) вблизи $\mathrm{P}=0$ особенность порядка $\frac{1}{\mathrm{P}^{2+\alpha}}$ интегрируема; 3) вблизи $\mathrm{P}_1=0$ особенность порядка $\frac{1}{\mathrm{P}_1}$ интегрируема.

Обозначая

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\mathrm{P}_1\mathrm{P}^{2+\alpha}}=k,$$

получим:

$$|u(x_0, y_0, z_0)|\leqslant\frac{Ak}{R_0^\alpha},$$

что и доказывает стремление к нулю функции u на бесконечности. Докажем, что u имеет непрерывные производные, которые получаются дифференцированием под знаком интеграла. Например,

$$\frac{\partial u}{\partial x_0}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_0}\,dx\,dy\,dz.$$

Дифференцирование под знаком интеграла, очевидно, выполнимо, так как полученный интеграл равномерно сходится. В самом деле,

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_0}=\frac{x-x_0}{r^3} \quad \text{и} \quad \left|\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_0}\right|\leqslant\frac{1}{r^2}.$$

Сходимость указанного интеграла вытекает из второго признака лекции VII.

Существование непрерывных первых производных у ньютоновского потенциала доказано. Для того чтобы доказать существование и непрерывность вторых производных, необходимо наложить некоторые новые ограничения на функцию $\rho(x, y, z)$. Именно, мы положим, что эта функция имеет непрерывные производные 1-го порядка. Это ограничение не является существенным, но замена его другим, более слабым, потребовала бы больших усилий.

Функцию ρ всегда можно разбить на два слагаемых ρ_1, ρ_2 так, чтобы в окрестности данной точки (x_0, y_0, z_0) функция ρ_2 была бы тождественно равна нулю, а функция ρ_1 была бы равна тождественно нулю в некоторой окрестности босконечности, т. е. везде вне некоторой области D. При этом можно добиться того, что ρ_1 и ρ_2 в свою очередь будут иметь непрерывные производные 1-го порядка. Тогда

$$u(x_0, y_0, z_0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho_1}{r}\,dx\,dy\,dz+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho_2}{r}\,dx\,dy\,dz.$$

Ввиду того, что $\rho_2\equiv 0$ в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), мы можем из второго интеграла исключить эту окрестность и тогда дифференцировать его по параметру 2 раза, получая равномерно сходящиеся интегралы. Займёмся первым интегралом. Мы будем иметь, например:

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho_1}{r}\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho_1\frac{x-x_0}{r^3}\,dx\,dy\,dz.$$

Вводя новые переменные $x=x_0+\xi$, $y=y_0+\eta$, $z=z_0+\zeta$, мы получим:

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho_1}{r}\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi\rho_1(x_0+\xi,\ y_0+\eta,\ z_0+\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^3}},$$

и очевидно, что по параметрам x_0, y_0, z_0 этот последний интеграл дифференцировать можно. Это следует из того, что интегралы от производных будут сходиться равномерно.

Нам остаётся доказать, что ньютонов потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона.

Возьмём функцию $\psi(x_0, y_0, z_0)$, равную нулю везде, кроме некоторого шара C с центром в точке (x_0, y_0, z_0), и имеющую непрерывные производные нескольких порядков. Тогда по формуле Грина (IX.4), замечая, что вне шара C функции ψ и $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ равны нулю, получим:

$$\psi(x_0, y_0, z_0)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta\psi(x, y, z)}{r}\,dx\,dy\,dz.$$

Умножая обе части на $\rho(x_0, y_0, z_0)$ и интегрируя по x_0, y_0, z_0, будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_0, y_0, z_0)\,\rho(x_0, y_0, z_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0 =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}}_{6\ \text{раз}} \frac{\Delta\psi(x, y, z)\,\rho(x_0, y_0, z_0)}{r}\,dx\,dy\,dz\,dx_0\,dy_0\,dz_0 =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\psi(x, y, z)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho}{r}\,dx_0\,dy_0\,dz_0\right)dx\,dy\,dz =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y, z)\,\Delta\psi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \tag{XI.5}$$

Последний интеграл можно преобразовать, так как при достаточно большой области D

$$\iiint_D u\,\Delta\psi\,dx\,dy\,dz = \iiint_D \psi\Delta u\,dx\,dy\,dz.$$

Сопоставляя это с (XI.5), приходим к заключению, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y, z)\,[\Delta u + 4\pi\rho]\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Из произвольности $\psi(x, y, z)$ вытекает

$$\Delta u = -4\pi\rho,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕКЦИЯ XII.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ШАРА.

Задача Дирихле для уравнения Лапласа, с которой мы познакомились в лекции II, есть задача об определении гармонической функции внутри области, если известны её значения на границе. Можно ставить задачу Дирихле не только для уравнения Лапласа, но и для других уравнений эллиптического типа, понимая тогда под задачей Дирихле задачу об отыскании решения данного уравнения в данной области, принимающего заданные значения на границе области. В настоящей лекции мы будем заниматься решением задачи Дирихле для шара, поставленной для уравнения Пуассона $\Delta u = \rho$.

Рассмотрим внутри области Ω, ограниченной поверхностью S, точку (x_0, y_0, z_0). Как мы видели, функция $\frac{1}{r}$, где

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

есть решение уравнения Лапласа.

Применяя формулу Грина (IX.4) к $\frac{1}{r}$ и некоторому решению u уравнения Пуассона $\Delta u = \rho$, получим:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \\ = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S\int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} u - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int\int\limits_\Omega\int \frac{\rho}{r}\, dx\, dy\, dz. \qquad \text{(XII.1)}$$

Если бы мы построили такую гармоническую функцию $g(x, y, z;\ x_0, y_0, z_0)$, что $g\Big|_S = \frac{1}{r}\Big|_S$, то, применяя формулу Грина к u и g, имели бы

$$\frac{1}{4\pi} \int\int\limits_\Omega\int (g\Delta u - u\Delta g)\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{4\pi} \int\int\limits_\Omega\int g\rho\, dx\, dy\, dz = \\ = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S\int \left(\frac{\partial g}{\partial n} u - g \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \qquad \text{(XII.2)}$$

Складывая (XII.1) и (XII.2) и учитывая значения g на S, получим:

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{4\pi r} - \frac{g}{4\pi}\right) \rho \, dx \, dy \, dz + \\ + \iint\limits_{S} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r} - \frac{g}{4\pi}\right) u \, dS. \qquad \text{(XII.3)}$$

Обозначая

$$\frac{1}{4\pi r} - \frac{g}{4\pi} = G(x, y, z; x_0, y_0, z_0), \qquad \text{(XII.4)}$$

имеем:

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\iiint\limits_{\Omega} G\rho \, d\Omega + \iint\limits_{S} \frac{\partial G}{\partial n} u \, dS. \qquad \text{(XII.5)}$$

Функция G называется функцией Грина; формула (XII.5) даёт в случае уравнения Пуассона в явном виде решение задачи Дирихле для Ω, если известна функция Грина.

Функция Грина принимает на границе Ω значение нуль и представляет сумму функции $\frac{1}{r}$ и гармонической всюду в области функции g. Очевидно, что она определяется однозначно.

Перейдём теперь к решению задачи Дирихле для шара. В этом случае можно построить функцию Грина в явном виде. Если точка (x, y, z) лежит на сфере радиуса единица, то $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$. Положим

$$r_1 = \sqrt{(x - \xi_0)^2 + (y - \eta_0)^2 + (z - \zeta_0)^2}.$$

В силу (X.8) на сфере $R = 1$ будем иметь:

$$\left.\frac{1}{R_0 r_1}\right|_{R=1} = \frac{1}{r}.$$

Функция $\frac{1}{R_0 r_1}$ есть, очевидно, гармоническая функция внутри шара $R < 1$. Следовательно, $g = \frac{1}{R_0 r_1}$.

Отсюда

$$G = \frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi R_0 r_1},$$

где

$$R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \qquad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

$$r_1 = \sqrt{\left(x - \frac{x_0}{R_0^2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0}{R_0^2}\right)^2 + \left(z - \frac{z_0}{R_0^2}\right)^2} = \\ = \frac{1}{R_0}\sqrt{R^2 R_0^2 - 2(xx_0 + yy_0 + zz_0) + 1},$$

откуда

$$G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{R^2 R_0^2 - 2(xx_0 + yy_0 + zz_0) + 1}}\right].$$

Как мы видим, функция G оказалась симметрической функцией относительно аргументов (x, y, z) и (x_0, y_0, z_0). Следовательно, как функция x_0, y_0, z_0, она также является гармонической, если $r \neq 0$.

Проверим теперь, что формула (XII.5) действительно даёт решение задачи Дирихле для шара. Наше доказательство будет состоять из двух частей. Мы докажем отдельно, что первое слагаемое правой части формулы (XII.5) даёт решение уравнения Лапласа, принимающее на границе S заданные значения, а второе слагаемое представляет собой решение уравнения Пуассона, равное нулю на границе шара Ω. Начнём с доказательства второго утверждения.

Докажем, что функция

$$u_1(x_0, y_0, z_0) = -\iiint_{\Omega} G\rho \, dx \, dy \, dz \tag{XII.6}$$

обращается в нуль на границе и удовлетворяет уравнению Пуассона. Для этого нужно оценить величину функции Грина $G(x, y, z; x_0, y_0 z_0)$. Покажем, что имеет место неравенство

$$0 < G < \frac{1}{r}. \tag{XII.7}$$

Установим прежде всего, что $G > 0$. Окружим внутреннюю точку (x_0, y_0, z_0) малой сферой σ и будем рассматривать функцию G в области Ω', заключённой между сферой σ и сферой S. В этой области G — гармоническая функция. Если сфера σ достаточно мала, то на ней G будет положительна, так как первое слагаемое сколь угодно велико, а второе — ограничено. На сфере S функция G по определению равна нулю. Следовательно, G неотрицательна везде на границе Ω', а на части границы Ω' положительна. По принципу минимума она положительна всюду в Ω'.

Для доказательства второго неравенства (XII.7) достаточно убедиться в том, что функция g положительна. Это следует из того, что она принимает на границе Ω положительные значения и гармонична в Ω.

Из неравенства (XII.7) следует, что интеграл сходится равномерно относительно точки (x_0, y_0, z_0) по признаку 2 лекции VII; следовательно, он представляет собой непрерывную функцию. Значение её, если (x_0, y_0, z_0) является точкой границы, есть нуль, следовательно, интеграл (XII.6) стремится к нулю, если (x_0, y_0, z_0) стремится к точке границы.

Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит внутри шара; запишем интеграл (XII.6) в виде

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi}\int\int_\Omega\int \frac{\rho}{r}\,dx\,dy\,dz + \frac{1}{4\pi}\int\int_\Omega\int g\rho\,dx\,dy\,dz.$$

Первое слагаемое есть ньютоновский потенциал и, следовательно, применение к нему оператора Лапласа даёт ρ. Второе слагаемое есть гармоническая функция, так как

$$\Delta_0\left[\frac{1}{4\pi}\int\int_\Omega\int g\rho\,dx\,dy\,dz\right] = \frac{1}{4\pi}\int\int_\Omega\int \rho\Delta_0 g\,dx\,dy\,dz = 0.$$

(Мы обозначили здесь оператор Лапласа через Δ_0, чтобы подчеркнуть, что производные берутся по аргументам x_0, y_0, z_0.) Следовательно, формула (XII.6) даёт решение уравнения Пуассона.

Переходя ко второй части доказательства, полезно преобразовать формулу (XII.5). Обозначим через γ угол, составленный радиус-векторами точек (x_0, y_0, z_0) и (x, y, z). Тогда расстояние r, как сторона треугольника, противолежащая углу γ, выразится в виде

$$r = \sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0\cos\gamma};$$

аналогично r_1 выразится при этом в виде

$$r_1 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{R_0^2} - 2\frac{R}{R_0}\cos\gamma},$$

а функция Грина будет иметь вид

$$G = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0\cos\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{R^2R_0^2 - 2RR_0\cos\gamma + 1}}\right],$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{R=1} = -\left.\frac{\partial G}{\partial R}\right|_{R=1} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{R - R_0\cos\gamma}{(R^2 + R_0^2 - 2RR_0\cos\gamma)^{3/2}} - \frac{RR_0^2 - R_0\cos\gamma}{(R^2R_0^2 - 2RR_0\cos\gamma + 1)^{3/2}}\right]_{R=1} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{1 - R_0^2}{(1 - 2R_0\cos\gamma + R_0^2)^{3/2}}.$$

Для случая уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ и формула (XII.5) даст решение задачи Дирихле в виде

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi}\int_S\int \frac{1 - R_0^2}{(1 - 2R_0\cos\gamma + R_0^2)^{3/2}} f(S)\,dS \qquad \text{(XII.8)}$$

где $f(S)$ — заданные значения $u(x_0, y_0, z_0)$ на нашей сфере. Эта формула носит название *формулы Пуассона*.

Мы получили в явном виде решение задачи Дирихле для шара единичного радиуса. Формула (XII.8) даёт возможность легко получить решение и для шара произвольного радиуса P. Введём гармоническую функцию

$$v(R_0, \vartheta_0, \varphi_0) = u\left(\frac{R_0}{P}, \vartheta_0, \varphi_0\right) =$$
$$= \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \frac{1 - \left(\frac{R_0}{P}\right)^2}{\left[1 - 2\frac{R_0}{P}\cos\gamma + \left(\frac{R_0}{P}\right)^2\right]^{3/2}} f(S) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Заменяя $P \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ через dS, окончательно получим:

$$v(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi P} \iint\limits_S \frac{P^2 - R_0^2}{(P^2 - 2PR_0\cos\gamma + R_0^2)^{3/2} P} f(S)\, dS. \qquad \text{(XII.9)}$$

Нам надо доказать, что функция $v(x_0, y_0, z_0)$ принимает на границе значения $f(S)$. Формула (XII.9), как это следует из самого способа её получения, справедлива в частном случае, когда $f(S) \equiv 1$ и когда решение задачи Дирихле, очевидно, существует (оно тождественно равно 1). Таким образом, имеет место равенство

$$\frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \frac{P^2 - R_0^2}{P(P^2 - 2PR_0\cos\gamma + R_0^2)^{3/2}}\, dS = 1.$$

Пусть S_0 — некоторая точка сферы S. Составим разность

$$v(x_0, y_0, z_0) - f(S_0) =$$
$$= \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \frac{P^2 - R_0^2}{P(P^2 - 2PR_0\cos\gamma + R_0^2)^{3/2}} [f(S) - f(S_0)]\, dS.$$

Мы покажем, что эта разность стремится к нулю, когда точка (x_0, y_0, z_0) стремится к S_0. Это доказательство почти совпадает с тем, которое мы уже проводили, рассматривая уравнение теплопроводности.

Окружим точку S_0 малым шаром радиуса η, причём выберем η столь малым, чтобы на всех тех точках поверхности, которые попадут внутрь этого шара, в силу непрерывности f, имело место неравенство

$$|f(S) - f(S_0)| < \varepsilon,$$

где ε — заданное положительное число. Обозначим через σ часть поверхности S, заключённую внутри шара радиуса η с центром в S_0.

12 Зак. 1956. С. Л. Соболев.

Написанная выше разность может быть представлена в виде

$$v(x_0, y_0, z_0) - f(S_0) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S-\sigma} \frac{P^2 - R_0^2}{P(P^2 - 2PR_0 \cos\gamma + R_0^2)^{3/2}} [f(S) - f(S_0)]\, dS +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\sigma} \frac{P^2 - R_0^2}{P(P^2 - 2PR_0 \cos\gamma + R_0^2)^{3/2}} [f(S) - f(S_0)]\, dS = I_1 + I_2.$$

Будучи непрерывной, функция $f(S)$ ограничена на S, т. е. $|f(S)| < M$, где M — некоторое число. Последнее слагаемое, обозначенное нами через I_2, оценивается очевидным образом:

$$|I_2| = \left| \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\sigma} \frac{P^2 - R_0^2}{P(P^2 - 2PR_0 \cos\gamma + R_0^2)^{3/2}} [f(S) - f(S_0)]\, dS \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \iint\limits_{\sigma} \frac{P^2 - R_0^2}{P(P^2 - 2PR_0 \cos\gamma + R_0^2)^{3/2}}\, dS <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S} \frac{P^2 - R_0^2}{P(P^2 - 2PR_0 \cos\gamma + R_0^2)^{3/2}}\, dS = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Первое слагаемое I_1 допускает следующую оценку:

$$|I_1| \leqslant 2M \cdot \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S-\sigma} \frac{P^2 - R_0^2}{P(P^2 - 2PR_0 \cos\gamma + R_0^2)^{3/2}}\, dS =$$

$$= \frac{M}{2\pi} \iint\limits_{S-\sigma} \frac{(P - R_0)(P + R_0)}{P[(P - R_0)^2 + 2PR_0(1 - \cos\gamma)]^{3/2}}\, dS.$$

Таким образом, $|I_1|$ может быть сколь угодно малым, если точку (x_0, y_0, z_0) взять достаточно близкой к S_0. В самом деле, при этом $1 - \cos\gamma$ везде вне σ будет больше некоторого положительного числа. Значит, знаменатель подинтегральной функции ограничен снизу, а числитель может быть сделан сколь угодно малым. Следовательно, $|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|v(x_0, y_0, z_0) - f(S_0)| < \varepsilon$, что и требовалось доказать. Гармоничность функции $v(x_0, y_0, z_0)$ следует из того, что при $R_0 < P$ функция G, а значит и $\frac{\partial G}{\partial n}$ является гармонической функцией переменных x_0, y_0, z_0.

Поставим теперь ещё одну задачу, так называемую внешнюю задачу Дирихле для шара; требуется определить функцию u, удовлетворяющую вне шара уравнению $\Delta u = \rho$, принимающую на сфере S заданные значения и стремящуюся к нулю на бесконечности. Решение такой задачи, очевидно, единственно.

Пусть r, как прежде, обозначает расстояние от точки (x, y, z) до точки (x_0, y_0, z_0), лежащей вне шара, и пусть r_1 — расстояние до сопряжённой точки.

Тогда гармоническая функция g вне шара, принимающая на шаре значения $\left.\frac{1}{r}\right|_S$, будет аналогично прежнему иметь вид

$$\frac{1}{R_0 r_1}.$$

Если предположить сначала, что на бесконечности функция u убывает, как $\frac{1}{R^\alpha}$, где $\alpha > 0$, первые её производные убывают как $\frac{1}{R^{\alpha+1}}$, а вторые — как $\frac{1}{R^{\alpha+2}}$, то нетрудно получить аналогично прежнему формулу

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\iiint\limits_{\Omega} G\rho\, dx\, dy\, dz + \iint\limits_{S} \frac{\partial G}{\partial n} u\, dS,$$

где

$$G = \frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi R_0 r_1}.$$

В написанной формуле производная функции под знаком интеграла взята по внешней нормали по отношению к шару. Она является внутренней нормалью по отношению к области, в которой рассматривается задача.

Снова ограничиваясь, прежде всего, случаем, когда $u|_S = 0$, видим, что решение уравнения $\Delta u = \rho$ с однородными условиями имеет вид

$$u = -\iiint\limits_{\Omega} G\rho\, dx\, dy\, dz. \tag{XII.10}$$

Мы будем иметь, проводя опять замену переменных:

$$G = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0\cos\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{R^2R_0^2 - 2RR_0\cos\gamma + 1}}\right],$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = \left.\frac{\partial G}{\partial R}\right|_{R=1} = \frac{R_0^2 - 1}{(R_0^2 - 2R_0\cos\gamma + 1)^{3/2}}.$$

Мы проверим, что формула (XII.10) даёт решение поставленной задачи, если ρ обращается в нуль тождественно вне некоторой ограниченной области. Читателю предоставляется анализ общего случая, когда, например, $|\rho| < \frac{A}{R^{2+\alpha}}$.

Переходим к доказательству. Как и прежде, формула, выражающая значение $u(x_0, y_0, z_0)$, распадается на два слагаемых, из которых первое представляет собой решение уравнения Пуассона с условием обращения решения в нуль на границе области, а второе является решением уравнения Лапласа, принимающим на границе заданные для u значения. Мы проверим справедливость этого утверждения только для первого слагаемого, так как для второго слагаемого проверка ничем не отличается от предыдущего случая.

Но это утверждение очевидно. В самом деле, при достаточно большом R_0 имеем оценки:

$$|G| \leqslant \frac{M}{R_0}, \quad \left|\frac{\partial G}{\partial n}\right| \leqslant \frac{M}{R_0}, \quad \left|\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial G}{\partial n}\right| \leqslant \frac{M}{R_0^2}. \qquad \text{(XII.11)}$$

Первое из этих неравенств и даёт оценку для u:

$$|u| \leqslant \int\int_{\Omega}\int \max|\rho| \frac{M}{R_0} dS = 4\pi \frac{\max|\rho| M}{R_0}.$$

Выполнение уравнения $\Delta u = \rho$ доказывается, как прежде; так же доказывается и обращение в нуль u на контуре. Из тех же оценок (XII.11) немедленно вытекает ещё одно следствие.

Если гармоническая вне шара радиуса 1 *функция стремится к нулю на бесконечности, то можно указать такую постоянную M, что*

$$|u| \leqslant \frac{M}{R_0}; \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{M}{R_0^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant \frac{M}{R_0^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \leqslant \frac{M}{R_0^2}. \qquad \text{(XII.12)}$$

Отсюда видно, что при $R_0 \to \infty$ функция u стремится к нулю.

В самом деле, такая функция должна по теореме единственности совпадать с функцией

$$u_1 = \int\int_S \frac{\partial G}{\partial n} u|_S \, dS,$$

которая, как мы видели выше, есть гармоническая функция, равная нулю на бесконечности и принимающая на S те же значения, что и u. Значит:

$$|u| \leqslant \int\int_S \left|\frac{\partial G}{\partial n}\right| |u| \, dS \leqslant \max|u|_S \frac{M}{R_0} 4\pi;$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_0}\right| \leqslant \int\int_S \left|\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)\right| |u| \, dS \leqslant \max|u|_S \frac{M}{R_0^2} 4\pi \text{ и т. д.}$$

Наше утверждение доказано. Легко заменить в теореме, доказанной нами, единичный шар шаром произвольного радиуса при помощи преобразования переменных. Тогда мы получим теорему.

Теорема 1. *Для всякой функции, гармонической в окрестности бесконечно далёкой точки и стремящейся к нулю при $R \to \infty$. существует такое число M, что имеют место неравенства* (XII.12),

ЛЕКЦИЯ XIII.

ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Мы встретились уже с постановкой двух основных задач теории уравнения Лапласа, а именно, с задачами Дирихле и Неймана.

Напомним, что задача Дирихле для уравнения Лапласа состоит в определении функции v в области Ω с границей S, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta u = 0 \tag{XIII.1}$$

и граничным условиям

$$u|_S = f_1(S). \tag{XIII.2}$$

Задача Неймана состоит в отыскании решения (XIII.1), удовлетворяющего условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f_2(S). \tag{XIII.3}$$

Функции $f_1(S)$ и $f_2(S)$ мы предположим непрерывными.

Примем за Ω область $z > 0$; поверхностью S будет служить плоскость XOY. Докажем, что *в такой области решение задачи Дирихле, ограниченное всюду, единственно, а решение задачи Неймана определяется с точностью до произвольной постоянной.*

Для того чтобы решение задачи Неймана также было единственным, достаточно потребовать ещё, например, чтобы $u(x, y, z)$ стремилось к нулю, когда точка (x, y, z) стремится к бесконечности, т. е. $|u(x, y, z)| < \varepsilon$, если $x^2+y^2+z^2 > R(\varepsilon)$.

Пусть, например, задача Дирихле имеет какие-нибудь два решения u_1 и u_2. При этом разность $v = u_1 - u_2$ будет гармонической функцией, обращающейся в нуль при $z = 0$. Определим v для отрицательных значений z нечётным образом:

$$v(x, y, z) = -v(x, y, -z).$$

Докажем, что эта функция будет теперь гармонической во всём пространстве, включая и плоскость $z = 0$.

Построим сферу σ произвольного радиуса с центром на плоскости $z = 0$ и определим функцию v_1, гармоническую внутри шара, ограниченного этой сферой, принимающую на поверхности сферы значения

$$v_1|_\sigma = v|_\sigma. \tag{XIII.4}$$

Легко видеть, что v_1 будет равна нулю при $z=0$. В самом деле, функция

$$w_1(x, y, z) = \frac{1}{2}[v_1(x, y, z) + v_1(x, y, -z)]$$

будет гармонической и принимает на сфере σ значения нуль; следовательно, $w_1(x; y, 0) = 0$. Но

$$w_1(x, y, 0) = v_1(x, y, 0).$$

Плоскость $z=0$ рассечёт наш шар на два полушара. Функция v_1 на границе каждого из них совпадает с v; на поверхности σ это следует из (XIII.4), а на части плоскости $z=0$ обе эти функции равны нулю. Следовательно, $v=v_1$ и, значит, функция v имеет все производные всюду внутри шара σ и гармонична в нём. Так как положение центра шара σ произвольно, то v будет гармонической во всём пространстве.

Поскольку по условию v ограничена во всём пространстве, то в силу теоремы Лиувилля (лекция XI) она тождественно равна некоторой постоянной. Эта постоянная может быть только нулём, так как $v=0$ при $z=0$.

Докажем единственность решения второй из рассматриваемых задач.

Пусть u_1 и u_2 — два решения задачи Неймана для полупространства. Тогда функция $v = u_1 - u_2$ удовлетворяет условиям:

$$1)\ \Delta v = 0 \text{ при } z > 0,$$

$$2)\ \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0} = 0.$$

Кроме того, функция v ограничена во всём верхнем полупространстве ввиду ограниченности u_1 и u_2.

Определим для отрицательных z функцию v с помощью формулы

$$v(x, y, z) = v(x, y, -z).$$

Докажем, что определённая таким образом функция v будет гармонической всюду, включая плоскость $z=0$.

Рассмотрим производную

$$\frac{\partial v}{\partial z} = w(x, y, z).$$

Это будет функция, гармоническая в верхнем и в нижнем полупространстве, удовлетворяющая условиям:

$$w(x, y, z) = -w(x, y, -z), \quad w(x, y, 0) = 0,$$

и, следовательно, как мы только что доказали, гармоническая во всём пространстве.

При этом функция

$$\omega(x, y, z) = \int_{z}^{z+1} \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z}\, dz = v(x, y, z+1) - v(x, y, z)$$

также будет гармонической во всём пространстве. Это легко проверить непосредственным дифференцированием.

Отсюда следует, что функция $v(x, y, z)$ — также гармоническая во всём пространстве. В самом деле, она могла бы не быть гармонической только на плоскости $z=0$. Но

$$v(x, y, z) = v(x, y, z+1) - \omega(x, y, z). \qquad \text{(XIII.5)}$$

Правая часть (XIII.5) гармонична на этой плоскости, следовательно, гармонична и левая.

Ввиду ограниченности v во всём пространстве по теореме Лиувилля имеем:

$$v = \text{const}.$$

Следовательно, решение задачи Неймана единственно с точностью до постоянного слагаемого, что и требовалось доказать.

Переходим к явному решению задач Дирихле и Неймана.

Предположим, что рассматриваемая нами гармоническая функция удовлетворяет условиям:

$$|u| \leqslant \frac{\mu}{R^\alpha}; \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{\mu}{R^{1+\alpha}}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant \frac{\mu}{R^{1+\alpha}}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \leqslant \frac{\mu}{R^{1+\alpha}},$$

где $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\alpha > 0$, а μ — постоянная.

После того как явное решение задач будет нами получено, надобность в этом предположении отпадёт.

Применим к функции u формулу Грина (IX.4), выбрав за объём Ω полушар с центром в начале координат

$$R \leqslant A, \quad z \geqslant 0.$$

Так как $\Delta u = 0$, то

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \int \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS,$$

где

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

Поверхность S состоит из куска S_1 плоскости $z=0$ и из поверхности S_2 полусферы $R=A$. Устремляя A к бесконечности, видим, что

$$\lim_{R\to\infty}\iint\limits_{S_2}\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=0.$$

В самом деле,

$$\left|\iint\limits_{S_2}u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}dS\right|\leqslant\frac{1}{(A-R_0)^2}\iint\limits_{S_2}|u|\,dS\leqslant\frac{4\pi\mu A^2}{(A-R_0)^2A^\alpha},$$

$$\left|\iint\limits_{S_2}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}dS\right|\leqslant\frac{1}{A-R_0}\iint\limits_{S_2}\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|dS\leqslant\frac{4\pi\mu A}{(A-R_0)A^\alpha},$$

где

$$R_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}.$$

Поэтому

$$u(x_0, y_0, z_0)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{z=0}\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS. \qquad \text{(XIII.6)}$$

Рассмотрим вместе с (x_0, y_0, z_0) ещё точку $(x_0, y_0, -z_0)$ и пусть $r_1=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}$. В верхней полуплоскости $\frac{1}{r_1}$ — гармоническая функция, так же, как и u. Поэтому

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{r_1}\Delta u-u\Delta\frac{1}{r_1}\right)dx\,dy\,dz=0,$$

и, следовательно,

$$\iint\limits_{S_1+S_2}\left(u\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}-\frac{1}{r_1}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=0.$$

Переходя к пределу, когда A стремится к бесконечности, и пользуясь теми же оценками, что и при выводе формулы (XIII.6), получим:

$$\iint\limits_{z=0}\left(u\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}-\frac{1}{r_1}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=0.$$

Заметим теперь, что на плоскости $z=0$ имеют место равенства $r_1=r$ и $\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n}=-\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$ (радиус-векторы r_1 и r симметричны относительно плоскости $z=0$), откуда

$$\iint\limits_{z=0}\left(u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=0. \qquad \text{(XIII.7)}$$

Складывая (XIII.7) и (XIII.6), получаем:

$$u(x_0, y_0, z_0)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{z=0}u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}dS=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{z=0}f_1(s)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}dS. \qquad \text{(XIII.8)}$$

Вычитая (XIII.7) из (XIII.6), будем иметь:

$$u(x_0, y_0, z_0)=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{z=0}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}dS=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{z=0}\frac{1}{r}f_2(S)\,dS. \qquad \text{(XIII.9)}$$

Проверим теперь, что формулы (XIII.8) и (XIII.9) действительно дают решение задач Дирихле и Неймана.

Мы будем предполагать, что $f_1(S)=f_1(x, y)$ и $f_2(S)=f_2(x, y)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие неравенствам:

$$|f_1(x, y)|\leqslant M, \quad |f_2(x, y)|\leqslant\frac{M}{\rho^{1+\alpha}}, \qquad \text{(XIII.10)}$$

где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\alpha>0$, а M — постоянная. Без ограничения общности можно считать $\alpha<1$.

Убедимся сначала, что интегралы, стоящие в правых частях этих равенств, действительно удовлетворяют уравнению Лапласа; это вытекает из того, что везде при $z_0>0$ их можно дифференцировать по x_0, y_0, z_0 под знаком интеграла. Так, например:

$$\Delta_0\iint\limits_{z=0}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}f_1(S)\,dS=\iint\limits_{z=0}f_1(S)\frac{\partial}{\partial n}\left[\Delta_0\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS=0;$$

так же точно доказываем, что правая часть (XIII.9) удовлетворяет уравнению. Оценим поведение правой части (XIII.8) и (XIII.9) при $R_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\to\infty$.

Начнём с оценки интеграла (XIII.8). Покажем, что этот интеграл является ограниченным. В самом деле, имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}f_1(x, y)\,dx\,dy=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{z_0}{r^3}f_1(x, y)\,dx\,dy.$$

Сходимость интеграла в правой части при условии (XIII.10) очевидна. Имеем, далее:

$$\left| -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_0}{r^3} f_1(x, y)\,dx\,dy \right| \leqslant M \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_0}{r^3}\,dx\,dy = M \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,dx\,dy.$$

Но последний интеграл равен телесному углу, под которым плоскость $z=0$ видна из точки (x_0, y_0, z_0) и, следовательно, равен $2\pi M$.

Таким образом получаем оценку

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} f_1(x, y)\,dx\,dy \right| \leqslant 2\pi M.$$

Следовательно, интеграл (XIII.8) представляет собой ограниченную гармоническую функцию переменных x_0, y_0, z_0.

Переходя к оценке функции $u\ (x_0, y_0, z_0)$, определяемой формулой (XIII.9), докажем сначала следующую лемму.

Лемма. *Если* $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$, *то справедливо неравенство*

$$x^2 - 2\vartheta x + 1 \geqslant \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

В самом деле,

$$2\vartheta x \leqslant 2x \quad \text{при} \quad x \geqslant 0, \quad 2\vartheta x \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$2\theta x \leqslant x + |x|$$

и

$$x^2 - 2\theta x + 1 \geqslant x^2 - x + 1 - |x|.$$

Но $|x| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}$ $\left(\text{это следует из неравенства } |ab| \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right)$ и, значит,

$$x^2 - 2\theta x + 1 \geqslant \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

Для того чтобы оценить интеграл (XIII.9) в точке $x_0 = \rho_0$, $y_0 = 0$, z_0 (оценка в этой точке благодаря симметрии даст всё, что нужно), мы положим:

$$\sqrt{\rho_0^2 + z_0^2} = R_0, \quad \frac{x}{R_0} = \xi, \quad \frac{y}{R_0} = \eta, \quad \frac{\rho_0}{R_0} = \theta.$$

При этом

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r}f_2(x, y)\,dx\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-2x\rho_0+y^2+z_0^2+\rho_0^2}}\,\frac{M}{\sqrt{(x^2+y^2)^{1+\alpha}}}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{M}{R_0^\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\xi^2-2\xi\theta+1+\eta^2}}\,\frac{1}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2)^{1+\alpha}}}\,d\xi\,d\eta.$$

Благодаря лемме имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi^2-2\xi\theta+1+\eta^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{(\xi-1)^2}{2}+\frac{\eta^2}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\xi-1)^2+\eta^2}},$$

откуда

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r}f_2(x, y)\,dx\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\sqrt{2}}{R_0^\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(\xi-1)^2+\eta^2}}\,\frac{1}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2)^{1+\alpha}}}\,d\xi\,d\eta.$$

Последний интеграл абсолютно сходится около всех трёх особенностей: 1) $\xi=1$, $\eta=0$; 2) $\xi=0$, $\eta=0$ и 3) $\xi=\infty$, $\eta=\infty$. Обозначая его через N, имеем:

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r}f_2(x, y)\,dx\,dy\right| \leqslant \frac{MN\sqrt{2}}{R_0^\alpha}.$$

Следовательно, функция $u(x_0, y_0, z_0)$ обращается в нуль на бесконечности, что и требовалось доказать.

Для того чтобы убедиться в том, что мы получили решения задач Дирихле и Неймана, нам остаётся проверить, что условия при $z=0$ также выполнены. Для этого достаточно установить, что

$$\lim_{z_0\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z_0}{r^3}f_i(x, y)\,dx\,dy = f_i(x_0, y_0) \quad (i=1,\ 2),$$

ибо так выражаются и предельное значение решения задачи Дирихле и предельные значения нормальной производной решения задачи Неймана.

Окружим точку (x_0, y_0) кружком c так, что внутри c

$$|f_i(x,y)-f_i(x_0, y_0)|<\frac{\varepsilon}{6\pi};$$

оставшуюся после выделения c часть плоскости x, y обозначим c'. Так как функции $f_i(x,y)$ ограничены, то пусть

$$|f_i(x,y)|\leqslant L.$$

Возьмём z_0 настолько малым, чтобы телесный угол ω_c, под которым виден круг c из точки (x_0, y_0, z_0), был бы больше, чем

$$2\pi-\frac{\varepsilon}{3L},$$

а следовательно, угол, под которым видно c', меньше, чем $\frac{\varepsilon}{3L}$ (сумма этих углов есть 2π). Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z_0}{r^3}f_i(x, y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}f_i(x,y)\,dx\,dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_i(x,y)\,d\omega=$$

$$=\int\limits_c\int f_i(x_0,y_0)\,d\omega+\int\limits_c\int[f_i(x, y)-f_i(x_0,y_0)]\,d\omega+\int\limits_{c'}\int f_i(x,y)\,d\omega;$$

$$\left|2\pi f_i(x_0,y_0)-\int\limits_c\int f_i(x_0, y_0)\,d\omega\right|\leqslant\left|f_i(x_0, y_0)\left(2\pi-2\pi+\frac{\varepsilon}{3L}\right)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{3};$$

$$\left|\int\limits_c\int[f_i(x, y)-f_i(x_0,y_0)]\,d\omega\right|\leqslant\int\limits_c\int\frac{\varepsilon}{6\pi}\,d\omega\leqslant\frac{\varepsilon}{3};$$

$$\left|\int\limits_{c'}\int f_i(x,y)\,d\omega\right|\leqslant L\int\limits_{c'}\int d\omega\leqslant\frac{\varepsilon}{3},$$

откуда

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z_0}{r^3}f_i(x,y)\,dx\,dy-2\pi f_i(x_0,y_0)\right|\leqslant\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕКЦИЯ XIV.

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ И ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ.

§ 1. Характеристики волнового уравнения.

Рассмотрим волновое уравнение с четырьмя переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F(x, y, z, t) \qquad \text{(XIV.1)}$$

и займёмся прежде всего его характеристиками.

Уравнение поверхностей характеристик будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2=0, \qquad \text{(XIV.2)}$$

или

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2=\frac{1}{a^2}. \qquad \text{(XIV.2')}$$

Рассмотрим в четырёхмерном пространстве переменных (x, y, z, t) поверхность, определяемую уравнением

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-a^2(t-t_0)^2=0. \qquad \text{(XIV.3)}$$

Поверхность (XIV.6) называется характеристическим коноидом. Легко проверить непосредственно, что она удовлетворяет уравнению (XIV.2'). Точка (x_0, y_0, z_0, t_0) является особой для этой поверхности. В этой точке поверхность не имеет касательной плоскости, так как в ней отношение $\cos(nx):\cos(ny):\cos(nz):\cos(nt)$ становится неопределённым. По аналогии с поверхностями в трёхмерном пространстве эту точку называют конической.

Для случая уравнения колебаний мембраны уравнение такой характеристической поверхности имеет вид

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-a^2(t-t_0)^2=0.$$

Это есть уравнение конуса с вершиной в точке (x_0, y_0, z_0) в трёхмерном пространстве x, y, t.

Представим уравнение (XIV.3) в виде

$$t = t_0 \pm \frac{r}{a}, \tag{XIV.4}$$

где

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

В зависимости от выбора знака в (XIV.4), мы получим уравнение верхней или нижней половин коноида. Мы используем нижнюю половину, т. е. часть, определённую уравнением:

$$t = t_0 - \frac{r}{a}.$$

§ 2. Метод Кирхгофа для решения задачи Коши.

Идея метода Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения такова же, как и идея приведённого выше решения первой краевой задачи для гиперболических уравнений (V, § 1) по методу последовательных приближений. Строится характеристический коноид с вершиной в данной точке (x_0, y_0, z_0). Как было выяснено в лекции III, значения функции u и её производных на этом коноиде связаны некоторым уравнением в частных производных, зависящим уже от трёх переменных и вытекающим из (XIV.2) в силу волнового уравнения. После подробного рассмотрения оказывается, что это обстоятельство позволяет просто выразить значение неизвестной функции в вершине коноида через известные данные, подобно тому как в лекции V значение функции $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ в некоторой точке на характеристике $\xi = \text{const}$. было нами выражено через значение её в любой другой точке той же характеристики при помощи квадратуры.

Приступим к изучению метода. Для того чтобы получить искомое соотношение на характеристическом коноиде, мы поступим таким же образом, как это было сделано в лекции III, § 4. Преобразуем уравнение (XIV.1) к новым независимым переменным:

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z$$

и

$$t_1 = t - t_0 + \frac{r}{a}.$$

Обозначим ещё

$$u\left(x_1, y_1, z_1, t_1 + t_0 - \frac{r}{a}\right) = u_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$$

и аналогично для других функций.

При этом

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\frac{x_1-x_0}{ra},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u_1}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t_1}\frac{x_1-x_0}{ra}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2}\frac{(x_1-x_0)^2}{r^2a^2}+\left(\frac{1}{ra}-\frac{(x_1-x_0)^2}{r^3a}\right)\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\text{[1]},$$

и наше уравнение переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2}+\frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right)+\frac{2}{ra}\frac{\partial u_1}{\partial t_1}+$$
$$+\left[\left(\frac{x_1-x_0}{ra}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_0}{ra}\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{ra}\right)^2-\frac{1}{a^2}\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2}=F_1(x_1, y_1, z_1, t_1),$$

где через $\frac{\partial}{\partial r}$ обозначено выражение

$$\frac{x_1-x_0}{r}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{y_1-y_0}{r}\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{z_1-z_0}{r}\frac{\partial}{\partial z_1}.$$

Оператор $\frac{\partial}{\partial r}$ обозначает производную, взятую по направлению радиуса r, проведённого из точки (x_0, y_0, z_0) в данную точку (x_1, y_1, z_1). В самом деле, $\frac{x_1-x_0}{r}=\cos(xr)$, $\frac{y_1-y_0}{r}=\cos(yr)$, $\frac{z_1-z_0}{r}=\cos(zr)$.

Так как $\left(\frac{x_1-x_0}{ar}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_0}{ar}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_0}{ar}\right)^2-\frac{1}{a^2}=0$, то наше уравнение запишется в виде:

$$\Delta u_1+\frac{2}{ar}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right]=F_1(x_1, y_1, z_1, t_1),$$

или

$$\frac{1}{r}\Delta u_1+\frac{2}{ar^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right]=\frac{1}{r}F_1(x_1, y_1, z_1, t_1). \qquad \text{(XIV.5)}$$

Формула (XIV.5) позволяет сразу построить некоторое частное решение волнового уравнения, имеющее важное значение. Пусть $F_1=0$. При этом функция $u_1=\frac{\Phi(t_1)}{r}$, где Φ_1 — произвольная, дважды дифференцируемая функция, даёт нам решение уравне-

[1] Очевидно, при нашей замене $r_1=r$ и далее всюду мы пишем r.

ния (XIV.5) в силу того, что $\frac{\partial u_1}{\partial t_1} = \frac{1}{r}\,\Phi'(t_1)$ и оба слагаемых левой части (XIV.5) обращаются в нуль. Подставляя вместо t_1 его выражение через x, y, z и t, получим: $u = \frac{1}{r}\,\Phi\left(t - t_0 + \frac{r}{a}\right)$. В данном случае параметр t_0 является несущественным, и мы можем взять решение в виде

$$u = \frac{1}{r}\,\Phi_1\left(t + \frac{r}{a}\right).$$

Легко проверить, что

$$u = \frac{1}{r}\,\Phi_3\left(-t + \frac{r}{a}\right)$$

будет также решением волнового уравнения, так как волновое уравнение не меняется при замене t на $-t$. Положив $\Phi_3\left(-t + \frac{r}{a}\right) = \Phi_2\left(t - \frac{r}{a}\right)$, получим, складывая оба частных решения:

$$u = \frac{1}{r}\left[\Phi_1\left(t + \frac{r}{a}\right) + \Phi_2\left(t - \frac{r}{a}\right)\right]. \qquad \text{(XIV.6)}$$

Формула (XIV.6) по своему внешнему виду напоминает формулу Даламбера для решения уравнения колебаний струны. Решения, даваемые этой функцией, носят название сферических волн. Первое слагаемое представляет собой волну постоянной формы, сходящуюся к точке $r = 0$. По мере приближения этой волны к своему центру амплитуда её растёт.

Второе слагаемое представляет собой волну постоянной формы, распространяющуюся от точки $r = 0$ на бесконечность. Эта волна также отличается от рассмотренных волн в струне тем, что её амплитуда убывает на бесконечности, как $\frac{1}{r}$.

Если Φ_1 и Φ_2 отличны от нуля лишь на конечном промежутке изменения своего аргумента, то в каждой точке пространства до вступления сферических волн и после их прохождения функция u становится равной нулю, т. е. воцаряется покой.

Как мы далее увидим, роль этих решений для волнового уравнения сходна с той ролью, которую играет функция $\frac{1}{r}$ для уравнения Лапласа.

Проинтегрируем обе части уравнения (XIV.5) по некоторой области Ω пространства x_1, y_1, z_1, содержащей внутри себя точку (x_0, y_0, z_0). Границу области Ω обозначим S. Для удобства выделим из этой области точку (x_0, y_0, z_0) при помощи малой сферы σ радиуса ε, а впоследствии перейдём к пределу при $\varepsilon \to 0$. Шаровой объём, ограниченный сферой σ, обозначим буквой τ.

Мы получим:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{\Omega-\tau}\left[\frac{1}{r}\,\Delta u_1+\frac{2}{ar^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right)\right]dx_1\,dy_1\,dz_1=$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{r}F_1(x_1,y_1,z_1,t_1)\,dx_1\,dy_1\,dz_1. \qquad \text{(XIV.7)}$$

Прежде чем переходить к пределу в левой части, мы несколько преобразуем её.

На основании формулы Грина (IX.4) имеем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{\Omega-\tau}\frac{1}{r}\,\Delta u_1\,dx_1\,dy_1\,dz_1=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{r}\,\Delta u_1\,dx_1\,dy_1\,dz_1=$$
$$=-4\pi u_1(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t-t_0)+\iint\limits_{S}\left(u_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial n}\right)dS; \qquad \text{(XIV.8)}$$

так как t_1 при $x_1=x_0,\ y_1=y_0,\ z_1=z_0$ равняется $t-t_0$.

Далее, вводя полярные координаты:

$$dx_1\,dy_1\,dz_1=r^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,dr,$$

будем иметь:

$$I_\sigma=\iiint\limits_{\Omega-\tau}\frac{2}{ar^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right]dx_1\,dy_1\,dz_1=$$
$$=\frac{2}{a}\iiint\limits_{\Omega-\tau}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right]\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,dr=$$
$$=\frac{2}{a}\iint\limits_{S+\sigma}r\frac{\partial u_1}{\partial t_1}[-\operatorname{sign}\cos(r,\ n)]\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi=\frac{2}{a}\iint\limits_{S+\sigma}r\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\,d\omega,$$

где через ω обозначен телесный угол [см. (IX.8)]. Продолжая пре образования, получим:

$$I_\sigma=\frac{2}{a}\iint\limits_{S+\sigma}r\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}dS=-\frac{2}{a}\iint\limits_{S+\sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial u_1}{\partial t_1}dS.$$

Предел $\iint\limits_{\sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial u_1}{\partial t_1}dS$, очевидно, равен нулю, если $\frac{\partial u_1}{\partial t_1}$ ограничено. В самом деле, $\frac{\partial r}{\partial n}$ ограничено, и интеграл меньше, чем

$$\frac{M}{\varepsilon}\iint\limits_{\sigma}dS=4\pi\varepsilon M,$$

где M — некоторая постоянная; следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\sigma = -\frac{2}{a}\iint\limits_S \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial r_1}{\partial t_1}dS. \tag{XIV.9}$$

Формулы (XIV.7), (XIV.8)' и (XIV.9) дают:

$$-4\pi u_1(x_0, y_0, z_0, t-t_0)+\iint\limits_S\left(u_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial n}-\frac{2}{ra}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right)dS =$$
$$=\iiint\limits_\Omega \frac{1}{r}F_1(x_1, y_1, z_1, t_1)\,dx_1\,dy_1\,dz_1.$$

Положим теперь $t_1=0$, тогда $t=t_0-\frac{r}{a}$; если, кроме того, $x_1=x_0$, $y_1=y_0$, $z_1=z_0$, то $t=t_0$; поэтому

$$u_1(x_0, y_0, z_0, 0)=u(x_0, y_0, z_0, t_0),$$
$$F_1(x_1, y_1, z_1, 0)=F\left(x, y, z, t_0-\frac{r}{a}\right)$$

и наша формула запишется так:

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left(u_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial n}-\frac{2}{ra}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_1=0}dS-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_\Omega \frac{1}{r}F\left(x, y, z, t_0-\frac{r}{a}\right)dx\,dy\,dz. \tag{XIV.10}$$

Формула (XIV.10) называется формулой Кирхгофа; как мы сейчас увидим, она позволяет найти решение задачи Коши для волнового уравнения.

Эта формула весьма напоминает по своему внешнему виду формулу Грина, выведенную нами ранее. Если считать u_1, $\frac{\partial u_1}{\partial n}$, $\frac{\partial u_1}{\partial t_1}$ заданными на поверхности S, то правая часть (XIV.10) будет представлять собой известную функцию. В правой части этой формулы находятся интегралы, которые принято называть запаздывающими потенциалами. Поясним это название на примере последнего интеграла

$$\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_\Omega \frac{1}{r}F\left(x, y, z, t_0-\frac{r}{a}\right)dx\,dy\,dz. \tag{XIV.11}$$

В таком виде этот интеграл отличается от ньютонова потенциала только тем, что функция F входит не с аргументом t_0, а с «запаздывающим» аргументом $t_0 - \frac{r}{a}$.

Переходим к решению задачи Коши, т. е. к решению уравнения (XIV.1) при условиях:

$$\left.\begin{aligned} u\big|_{t=0} &= \varphi_0(x, y, z), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= \varphi_1(x, y, z). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV.12)}$$

За поверхность S примем поверхность $t_0 - \frac{r}{a} = 0$; тогда на ней $t = 0$ при $t_1 = 0$.

Область, ограниченная S, есть шар радиуса at_0 вокруг точки x_0, y_0, z_0 и, следовательно, к ней применима формула (XIV.10). При $t = 0$ условия (XIV.12) определяют все производные первого порядка от u и, следовательно, от u_1. Мы будем иметь:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right|_{t=0} = \varphi_1(x, y, z);$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\cos(nx) + \frac{\partial u_1}{\partial y_1}\cos(ny) + \frac{\partial u_1}{\partial z_1}\cos(nz) =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\cos(nx) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial y}\right)\cos(ny) +$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial z}\right)\cos(nz) = \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n}$$

и, следовательно,

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|_{t=0} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \frac{1}{a}\varphi_1(x, y, z)\frac{\partial r}{\partial n},$$

и окончательно

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{r=at_0}\left(\varphi_0\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} - \frac{1}{ar}\frac{\partial r}{\partial n}\varphi_1\right)dS -$$

$$- \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{r\leqslant at_0}\frac{1}{r}F\left(x, y, z, t_0 - \frac{r}{a}\right)dx\,dy\,dz. \qquad \text{(XIV.13)}$$

Формула (XIV.13) даёт явное выражение для значения неизвестной функции в любой точке (x_0, y_0, z_0) в произвольный момент времени $t_0 > 0$. Тем самым доказывается единственность решения задачи Коши для волнового уравнения, если только такое решение существует. Мы покажем, далее, что полученная нами функция удовлетворяет уравнению и начальным условиям, а также проверим корректность постановки задачи Коши.

Формуле (XIV.13) для случая $F=0$ можно дать ещё одно выражение, которое называется формулой Пуассона и часто встречается в литературе.

Обозначим через $T_\rho\{\psi\}$ среднее арифметическое значений функции ψ на сфере радиуса ρ, описанной вокруг точки (x_0, y_0, z_0):

$$T_\rho\{\psi\}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\psi(\rho, \vartheta, \varphi)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

где ρ, ϑ, φ суть полярные координаты с началом в точке (x_0, y_0, z_0), связанные с декартовыми прямоугольными координатами посредством формул

$$\begin{gathered} x=x_0+\rho\sin\vartheta\cos\varphi;\\ y=y_0+\rho\sin\vartheta\sin\varphi;\\ z=z_0+\rho\cos\vartheta;\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;\\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi. \end{gathered}$$

Пользуясь этим обозначением, можно переписать формулу (XIV.13) в следующем виде

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0)=t_0T_{at_0}\{\varphi_1\}+\frac{\partial}{\partial t_0}[t_0T_{at_0}\{\varphi_0\}].$$

Проверим это. В самом деле, на поверхности $\rho=at_0$ мы имеем:

$$\frac{\partial\rho}{\partial n}=-\frac{\partial\rho}{\partial\rho}=-1,$$

$$dS=a^2t_0^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

и, следовательно,

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\rho=at_0}\int\frac{1}{a\rho}\frac{\partial\rho}{\partial n}\varphi_1\, dS=\frac{t_0}{4\pi}\int\limits_{\rho=at_0}\int\varphi_1(\rho, \vartheta, \varphi)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Далее,

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}=-\frac{\partial\varphi_0}{\partial\rho}, \quad \frac{\partial\frac{1}{\rho}}{\partial n}=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial\rho}=\frac{1}{a^2t_0^2},$$

откуда после несложных выкладок получим:

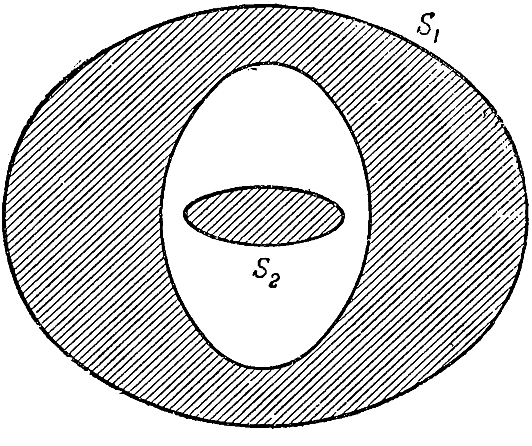
$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\rho=at_0}\int\left(\varphi_0\frac{\partial\frac{1}{\rho}}{\partial n}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}\right)dS=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\rho=at_0}\int\varphi_0\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi+$$
$$+t_0\frac{\partial}{\partial t_0}\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\rho=at_0}\int\varphi_0\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

что и требовалось доказать.

Отметим некоторые важные следствия из формулы (XIV.13).

Представим себе, что внешних возмущающих сил нет, т. е. $F=0$, а начальное возмущение при $t=0$ сосредоточено в некоторой ограниченной области ω. Будем исследовать поведение решения в некоторой точке (x_0, y_0, z_0), лежащей вне области ω. Пусть расстояние от области ω до точки (x_0, y_0, z_0) равно δ. При $t_0 < \frac{\delta}{a}$ сфера S, уравнение которой $r = at_0$, будет лежать вся вне ω, и поэтому результат подстановки такого значения t_0 в правую часть (XIV.13) даёт нуль. При $t_0 = \frac{\delta}{a}$ функция u начнёт изменяться до тех пор, пока S пересекает область ω. Затем при $t_0 = \frac{D}{a}$, где D — наибольшее удаление точки области ω от точки (x_0, y_0, z_0), u станет опять равным нулю и таким и останется. Чем дальше точка (x_0, y_0, z_0) от области ω, тем позднее дойдёт туда возмущение и тем позднее оно пройдёт мимо этой точки. В каждый данный момент t_0 мы можем построить поверхность S_1, отделяющую точки, до которых возмущение ещё не дошло, от тех, куда это возмущение уже докатилось. Эту поверхность называют передним фронтом волны.

Другая поверхность, S_2, отделяет точки, в которых возмущение ещё имеется, от тех, в которых колебание прекратилось. Эта поверхность называется задним фронтом волны.



Черт. 12.

Наличием заднего фронта волны объясняется тот факт, что звук, издаваемый каким-либо источником, не затухает постепенно в данной точке пространства, а прекращается сразу после прохождения волны. Если бы это обстоятельство не имело места, звуки сливались бы друг с другом, как звуки рояля, на котором нажата и не отпущена педаль.

На черт. 12 изображены передний и задний фронты волны, возникшей из возмущения в ограниченной области ω.

Переходим к доказательству корректности постановки задачи Коши.

Если вместо функций φ_0 и φ_1 мы подставим в формулу (XIV.13) другие $\overset{*}{\varphi}_0$ и $\overset{*}{\varphi}_1$, такие, что

$$|\varphi_0-\overset{*}{\varphi}_0|<\varepsilon,\ \left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}-\frac{\partial\overset{*}{\varphi}_0}{\partial x}\right|<\varepsilon,\ \left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}-\frac{\partial\overset{*}{\varphi}_0}{\partial y}\right|<\varepsilon,\ \left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}-\frac{\partial\overset{*}{\varphi}_0}{\partial z}\right|<\varepsilon,$$

$$|\varphi_1-\overset{*}{\varphi}_1|<\varepsilon,$$

то решение u^* задачи Коши, как это вытекает из формулы (XIV. 13), для новых начальных данных будет мало отличаться от решения для старых, ибо

$$|u^*-u|=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left|\int\limits_{r=at_0}\int\left[(\overset{*}{\varphi}_0-\varphi_0)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\overset{*}{\varphi}_0}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}\right)-\frac{1}{ar}\frac{\partial r}{\partial n}(\overset{*}{\varphi}_1-\varphi_1)\right]ds\right|\leqslant M\varepsilon,$$

где M — некоторая постоянная, зависящая только от t_0.

Следовательно, решение u зависит от функции φ_0 непрерывно до порядка (1, 0) и от функции φ_1 непрерывно до порядка (0, 0) в смысле лекции II.

Докажем теперь, что полученное нами решение действительно удовлетворяет уравнению.

Прежде всего заметим, что доказательство достаточно провести для того случая, когда φ_0 и φ_1 тождественно равны нулю, так как мы сможем тогда установить существование решения для любых дважды непрерывно дифференцируемых функций φ_0 и φ_1. В самом деле, если мы докажем, что решение при нулевых начальных условиях существует, то мы установим тем самым существование решения у уравнения

$$\Delta w-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=F-\Delta v+\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

при условиях

$$w\Big|_{t=0}=\frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,$$

где v — произвольная функция.

Если v удовлетворяет условиям

$$v\Big|_{t=0}=\varphi_0,\quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1,$$

а такие функции, очевидно, существуют, например $v=\varphi_0+t\varphi_1$, то отсюда следует существование функции $u=w+v$, удовлетворяющей условиям Коши и волновому уравнению (XIV. 1) Если же решение этой последней задачи существует, то оно обязано выражаться формулой (XIV. 13).

Полагая в формуле (XIV.13) $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$, получим:

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \\ = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \leqslant at_0} \frac{1}{r} F\left(x, y, z, t_0 - \frac{r}{a}\right) dx\, dy\, dz. \qquad \text{(XIV.14)}$$

Покажем, что функция $u(x_0, y_0, z_0, t_0)$, даваемая формулой (XIV. 14), действительно удовлетворяет уравнению. Непосредственная проверка этого обстоятельства потребовала бы громоздких выкладок, и мы предпочтём избрать другой путь.

Мы докажем одно важное интегральное тождество, равносильное в некотором смысле волновому уравнению для функции u, определяемой формулой (XIV.10).

Рассмотрим произвольную функцию $\psi(x_0, y_0, z_0, t_0)$, обращающуюся в нуль везде, кроме некоторого шара c в четырёхмерном пространстве с центром в точке (x_0, y_0, z_0, t_0) и имеющую везде несколько непрерывных производных.

Эта функция удовлетворяет некоторому уравнению:

$$\Delta\psi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \Phi, \qquad \text{(XIV.15)}$$

где Φ вычисляется непосредственным дифференцированием.

Согласно нашему предположению

$$\psi\Big|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t}\Big|_{t=T} = 0$$

при достаточно большом T. При этом функция ψ, как решение задачи Коши для уравнения (XIV. 15), представляется для $t < T$ формулой

$$\psi(x_0, y_0, z_0, t_0) = \\ = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \leqslant a(T-t_0)} \frac{1}{r} \Phi\left(x, y, z, t_0 + \frac{r}{a}\right) dx\, dy\, dz. \qquad \text{(XIV.16)}$$

(Этой формулы мы не выводили, но она сразу получается, если заменить сначала в уравнении t на $T - t^*$ и, преобразовав данные, написать решение уравнения, а потом вернуться от переменного t^* к переменному t.)

В формуле (XIV. 16) мы могли бы и не ставить пределов интегрирования, так как при $r \geqslant a(T - t_0)$ функция $\Phi\left(x, y, z, t_0 + \frac{r}{a}\right)$, очевидно, обращается в нуль, ибо $t_0 + \frac{r}{a} \geqslant T$.

Пусть $F(x_0, y_0, z_0, t_0)=0$ при $t_0<0$.

Умножим функцию $\psi(x_0, y_0, z_0, t_0)$ на $F(x_0, y_0, z_0, t_0)$ и проинтегрируем по всему пространству. Мы будем иметь:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x_0, y_0, z_0, t_0)\,F(x_0, y_0, z_0, t_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0\,dt_0=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(x_0, y_0, z_0, t_0)\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r}\Phi\left(x, y, z, t_0+\frac{r}{a}\right)dx\,dy\,dz\right\}dx_0\,dy_0\,dz_0\,dt_0.$$

Последний интеграл можно записать в виде

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r}\Phi\left(x, y, z, t_0+\frac{r}{a}\right)\times$$

$$\times F(x_0, y_0, z_0, t_0)\,dx\,dy\,dz\,dx_0\,dy_0\,dz_0\,dt_0.$$

В самом деле, подинтегральная функция отлична от нуля в ограниченной области своих независимых переменных. Если $\frac{r}{a}$ или t_0 достаточно велико, то $t_0+\frac{r}{a}$ также будет большим, так как $t_0>0$. Заменим переменные, полагая $t_0+\frac{r}{a}=t$.

Тогда справедлива формула:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x_0, y_0, z_0, t_0)\,F(x_0, y_0, z_0, t_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0\,dt_0=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x, y, z, t)\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r}F\left(x_0, y_0, z_0, t-\frac{r}{a}\right)dx_0\,dy_0\,dz_0\right\}dx\,dy\,dz\,dt.$$

В самом деле, внутренний интеграл имеет смысл, ибо подинтегральная функция при фиксированных x, y, z, t отлична от нуля лишь в ограниченной области. Отсюда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x, y, z, t)\,F(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz\,dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\Delta\psi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi^2}{\partial t^2}\right)u(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz\,dt, \qquad \text{(XIV.17)}$$

где

$$u(x, y; z, t) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r}F\left(x_0, y_0, z_0, t - \frac{r}{a}\right)dx_0\,dy_0\,dz_0.$$

Тождество (XIV.17) и есть то основное интегральное тождество, которому удовлетворяет функция u. Мы покажем, что если u имеет непрерывные производные 2-го порядка, то она удовлетворяет уравнению (XIV.1). В самом деле, оператор

$$\Delta - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

как нетрудно видеть, является самосопряжённым [см. § 2 (V)].

Поэтому интеграл

$$\int\int\limits_{\Omega}\int\int\left[u\left(\Delta\psi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) - \psi\left(\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right]dx\,dy\,dz\,dt =$$

$$= \int\int\limits_{\Omega}\int\int\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} + \frac{\partial P_t}{\partial t}\right)dx\,dy\,dz\,dt$$

преобразуется в интеграл, взятый на поверхности S, ограничивающей объём Ω [см. (V.15)].

Если взять объём Ω достаточно большим, так чтобы из поверхности S функция ψ и все её первые производные равнялись нулю, то правая часть последнего равенства обратится в нуль, и мы получим:

$$\int\int\limits_{\Omega}\int\int u\left(\Delta\psi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)dx\,dy\,dz\,dt =$$

$$= \int\int\limits_{\Omega}\int\int \psi\left(\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx\,dy\,dz\,dt,$$

отсюда на основании (XIV.17)

$$\int\int\limits_{\Omega}\int\int \psi(x, y, z, t)\left[\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F\right]dx\,dy\,dz\,dt = 0.$$

Последний интеграл обращается в нуль при любых ψ, откуда

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F.$$

Тем самым доказано, что функция u удовлетворяет уравнению.

Нам остаётся доказать, что $u = 0, \frac{\partial u}{\partial t_0} = 0$ при $t_0 = 0$. Обращение в нуль u есть непосредственное следствие формулы (XIV.14). Для того чтобы доказать, что $\frac{\partial u}{\partial t_0} = 0$ при $t_0 = 0$, заменим переменные в интеграле, стоящем в правой части (XIV.14), полагая

$$x = x_0 + at_0\xi, \quad y = y_0 + at_0\eta, \quad z = z_0 + at_0\zeta;$$

тогда

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = at_0\rho,$$

где

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

В новых переменных

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) =$$
$$= -\frac{a^2 t_0^2}{4\pi} \int\!\!\int\!\!\int_{\rho \leqslant 1} \frac{1}{\rho} F[x_0 + at_0\xi, y_0 + at_0\eta, z_0 + at_0\zeta, t_0(1-\rho)]\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Правую часть можно дифференцировать под знаком интеграла. После того, положив $t_0 = 0$, имеем:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t_0}\right|_{t_0=0} = 0.$$

Предполагая ограниченность производных 1-го порядка от F, обоснование законности дифференцирования под знаком интеграла см. § 2 лекции VII.

Мы намеренно не останавливались здесь на вопросе о том, сколько непрерывных производных необходимо иметь в начальных данных для того, чтобы наши формулы дали решение задачи, обладающее нужным числом непрерывных производных. Как мы увидим далее, этот вопрос не имеет существенного значения, если воспользоваться понятием об обобщённых решениях волнового уравнения.

Сделаем ещё одно важное замечание.

Как мы видели, решение уравнений колебания струны было столь же гладким, как и начальные условия, т. е. допускало столько же непрерывных производных, сколько их было у функций, стоящих в начальных условиях.

Решение уравнений теплопроводности оказывалось более гладким, чем начальные условия.

Решение волнового уравнения в этом смысле отличается от рассмотренных задач. Оно является, вообще говоря, менее гладким, чем начальные условия. Это видно хотя бы из того, что значение функции u выражается в формуле Кирхгофа через интеграл от нормальной производной $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{t=0}$.

Значение производной порядка k, удовлетворяющей тому же уравнению, связано, таким образом, с начальными значениями производных порядка $k+1$ от начальных данных.

Мы разобрали в этой лекции только задачу Коши в случае, когда начальные данные относятся к поверхности $t=0$. Однако тот же самый метод позволяет строить решение задачи Коши и в общем случае, когда начальные данные заданы на гиперповерхности $t=\psi(x, y, z)$, а также решение задачи, аналогичной первой краевой задаче гиперболических уравнений на плоскости.

Подробный разбор этих задач мы предоставляем читателю.

ЛЕКЦИЯ XV.

СВОЙСТВА ПОТЕНЦИАЛОВ ПРОСТОГО И ДВОЙНОГО СЛОЯ.

§ 1. Общие замечания.

Для того чтобы рассмотреть задачи Дирихле и Неймана кроме шара и полупространства ещё и для других областей, мы должны будем изучить в отдельности поведение интегралов

$$I_1 = \int\limits_S\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} f_1(S)\, dS \quad \text{и} \quad I_2 = \int\limits_S\int \frac{f_2(S)\, dS}{r}, \qquad \text{(XV.1)}$$

которые встречались нам уже неоднократно. Как мы упоминали выше, интеграл I_2 называется потенциалом простого слоя, а функция $f_2(S)$ — его плотностью. Интеграл I_1 называется потенциалом двойного слоя, а $f_1(S)$ — его плотностью. Функции $f_2(S)$ и $f_1(S)$ будем предполагать непрерывными.

Мы будем называть поверхность S гладкой в смысле Ляпунова, или просто *поверхностью Ляпунова*, если будут выполнены следующие условия:

а) Поверхность S имеет везде касательную плоскость.

б) Вокруг каждой точки P_0 поверхности можно описать такой шар радиуса h, не зависящего от P_0, внутрь которого попадёт лишь участок Σ поверхности S, встречающий прямые, параллельные нормали $\mathbf{n}_0$ в точке P_0, не более чем один раз.

в) Если P_1 и P_2 — две точки поверхности, а $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — единичные векторы, направленные по внешней нормали к поверхности S в этих точках, то вектор $\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2$ удовлетворяет неравенству

$$|\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2| \leqslant Ar^\delta,$$

где A и δ — постоянные числа; $0 < \delta \leqslant 1$, а r обозначает расстояние между точками P_1 и P_2.

г) Телесный угол ω_σ, под которым любая часть σ поверхности S видна из произвольной точки P_0, ограничен:

$$|\omega_\sigma| \leqslant K.$$

(Если прямые, выходящие из P_0, встречают поверхность S неоднократно, то, взяв за σ множество таких кусков S, которые видны с положительной стороны, мы можем получить $\omega_\sigma > 4\pi$ и вообще сколь угодно большое число. Поэтому такое ограничение существенно.)

Мы рассмотрим сначала случай, когда S — конечная, гладкая в смысле Ляпунова, замкнутая поверхность. Пусть Ω — область, заключённая внутри S.

Займёмся более детальным исследованием характера интегралов, входящих в выражение потенциала простого и двойного слоя.

Исследуем поведение этих интегралов вблизи некоторой точки поверхности P. Для удобства выберем систему координат таким образом, чтобы исследуемая точка поверхности P попала в начало, касательная плоскость в этой точке совпала бы с плоскостью XOY, а ось OZ — с направлением внутренней нормали. Пусть локальное уравнение поверхности S будет

$$z = \zeta(x, y);$$

тогда

$$\zeta(0, 0) = \frac{\partial \zeta(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial \zeta(0,0)}{\partial y} = 0.$$

§ 2. Свойства потенциала двойного слоя.

Рассмотрим прежде всего потенциал двойного слоя:

$$w = \iint_S f_1(S) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, dS. \tag{XV.2}$$

Выражение $\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$, очевидно, представляет собой функцию двух переменных точек: точки (x_0, y_0, z_0), занимающей произвольное положение в пространстве, и точки (x, y, z), расположенной на поверхности S. Производная берётся по направлению внешней нормали к поверхности S в точке (x, y, z).

Докажем несколько простых предложений, касающихся этого потенциала.

Лемма 1. *Обозначим через φ угол, составленный направлением нормали в произвольной точке поверхности S, с радиус-вектором, проведённым из этой точки в точку (x_0, y_0, z_0). Тогда потенциал двойного слоя может быть представлен в виде*

$$w = \iint_S f_1(S) \frac{\cos\varphi}{r^2}\, dS. \tag{XV.3}$$

Докажем формулу (XV.3). Очевидно, косинусы углов, составленных радиус-вектором, проведённым из точки (x, y, z) в точку

x_0, y_0, z_0) с осями координат, будут соответственно равны

$$\frac{x_0-x}{r},\quad \frac{y_0-y}{r},\quad \frac{z_0-z}{r}.$$

Следовательно,

$$\cos\varphi=\frac{x_0-x}{r}\cos(nx)+\frac{y_0-y}{r}\cos(ny)+\frac{z_0-z}{r}\cos(nz)=-\frac{\partial r}{\partial n}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Потенциал двойного слоя сохраняет смысл, если вместо точки* (x_0, y_0, z_0) *подставить точку, лежащую на поверхности* S.

Для доказательства этого утверждения мы подставим в формулу (XV.3) $x_0=y_0=z_0=0$.

Выделим из поверхности S участок S_1, содержащий начало, так чтобы z на S_1 была однозначной функцией от x и y. Оставшаяся часть S_2 не влияет на сходимость интеграла.

Интеграл при этом будет иметь вид

$$w_{S_1}=\int\limits_{S_1}\int f_1(S)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS=$$

$$=-\int\limits_{S_1}\int f_1(S)\left(\frac{x}{r^3}\cos(nx)+\frac{y}{r^3}\cos(ny)+\frac{z}{r^3}\cos(nz)\right)dS.$$

Оценим величину

$$-\frac{\cos\varphi}{r^2}=\frac{x}{r^3}\cos(nx)+\frac{y}{r^3}\cos(ny)+\frac{z}{r^3}\cos(nz).$$

Мы имеем

$$\cos(nx)=\mathbf{ni},\ \cos(ny)=\mathbf{nj},\ \cos nz=\mathbf{nk},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ суть единичные векторы, направленные по координатным осям. Далее $\mathbf{n}_0=\mathbf{k}$, и поэтому

$$\cos(nx)=\mathbf{ni}=(\mathbf{n}-\mathbf{n}_0)\,\mathbf{i},$$
$$\cos(ny)=\mathbf{nj}=(\mathbf{n}-\mathbf{n}_0)\,\mathbf{j},$$
$$\cos(nz)=\mathbf{nk}=(\mathbf{n}-\mathbf{n}_0)\,\mathbf{k}+\mathbf{n}_0\mathbf{k}=1+(\mathbf{n}-\mathbf{n}_0)\,\mathbf{k},$$

откуда, используя условия гладкости Ляпунова, имеем:

$$\begin{gathered}|\cos(nx)|<Ar^{\delta},\\ |\cos(ny)|<Ar^{\delta},\\ |\cos(nz)|>1-Ar^{\delta}.\end{gathered}\tag{XV.4}$$

Оценим ещё величину z.

По теореме о конечных приращениях

$$z(x, y) = x \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\xi, \eta} + y \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\xi, \eta},$$

где (ξ, η) — некоторая точка, лежащая на отрезке, соединяющем начало координат с точкой (x, y).

Но, как известно из курса дифференциальной геометрии,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos(nx)}{\cos(nz)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos(ny)}{\cos(nz)},$$

откуда

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \leqslant \frac{Ar^\delta}{1 - Ar^\delta}; \quad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \leqslant \frac{Ar^\delta}{1 - Ar^\delta}.$$

Принимая во внимание, что $|x| \leqslant \rho$, $|y| \leqslant \rho$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, получим для точек внутри шара $Ar^\delta < \frac{1}{3}$ неравенства

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \leqslant \frac{3}{2} Ar^\delta; \quad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \leqslant \frac{3}{2} Ar^\delta; \quad |z| \leqslant 3A\rho r^\delta \leqslant \rho. \qquad \text{(XV.5)}$$

Для точек, лежащих внутри указанного шара $Ar^\delta < \frac{1}{3}$, справедливо неравенство

$$\rho \leqslant r \leqslant 2\rho.$$

Левая его часть очевидна, а правая следует из того, что $r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \leqslant \sqrt{2\rho^2} \leqslant 2\rho$. Это позволяет упростить неравенства (XV.5). Имеем

$$|z| \leqslant 3A\, 2^\delta \rho^{1+\delta} \leqslant 6A\rho^{1+\delta}.$$

Таким же образом из (XV.4) получим

$$\begin{aligned} |\cos nx| &\leqslant 2^\delta A\rho^\delta \leqslant 2A\rho^\delta, \\ |\cos ny| &\leqslant 2A\rho^\delta, \\ |\cos nz| &> 1 - 2A\rho^\delta. \end{aligned} \qquad \text{(XV.6)}$$

Подставляя эти оценки в выражение для $\frac{\cos\varphi}{r^2}$, получим:

$$\left|\frac{\cos\varphi}{r^2}\right| < 2A\rho^{-2+\delta} + 2A\rho^{-2+\delta} + 6A\rho^{-2+\delta} < \frac{10A}{\rho^{2-\delta}}.$$

Отсюда следует интегрируемость $f_1(S)\frac{\cos\varphi}{r^2}$. Следовательно, наш интеграл действительно имеет смысл.

Как мы сейчас установим, w есть разрывная функция, которая претерпевает разрыв непрерывности при переходе через поверхность S. Обозначим через w_0 величину потенциала двойного слоя, если вместо x_0, y_0, z_0 в формулу (XV.3) подставлена точка поверхности S; w_0 есть функция точки поверхности.

Теорема 1. *Функция w имеет пределы при стремлении (x_0, y_0, z_0) к поверхности S извне и изнутри, причём эти пределы различны. Если предел значений w извне обозначить через w_e, а предел значений w изнутри — через w_i, то имеют место формулы:*

$$\left.\begin{aligned} w_e &= -2\pi f_1(S) + w_0, \\ w_i &= 2\pi f_1(S) + w_0. \end{aligned}\right\} \tag{XV.7}$$

Для доказательства формул (XV.7) рассмотрим w. Мы будем иметь:

$$w(P) = \iint\limits_S [f_1(S) - f_1(P_0)] \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS + \iint\limits_S f_1(P_0) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = \\ = w_1(P) + w_2(P), \tag{XV.8}$$

где через P_0 обозначена какая-нибудь фиксированная точка поверхности S. Первое слагаемое в формуле (XV.8), обозначенное через $w_1(P)$, есть непрерывная функция в точке P_0. Это следует из равномерной сходимости интеграла в этой точке [см. § 1 (VII)], которую легко установить. В самом деле, окружим точку P_0 областью $\sigma(\varepsilon)$, столь малой, чтобы иметь

$$|f_1(S) - f_1(P_0)| < \varepsilon,$$

где S — точка, принадлежащая области $\sigma(\varepsilon)$.

Тогда для любой точки P, лежащей в некоторой окрестности $h(\varepsilon)$ точки P_0, будем иметь:

$$\left| \iint\limits_\sigma [f_1(S) - f_1(P_0)] \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS \right| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon \iint\limits_\sigma \left| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right| dS = \varepsilon \iint\limits_{\sigma_1} d\omega - \varepsilon \iint\limits_{\sigma_2} d\omega,$$

причём r — расстояние между точкой P, принадлежащей окрестности $h(\varepsilon)$ точки P_0, и точкой S на поверхности σ; через σ_1 обозначена часть σ, которая видна из точки P под положительным телесным углом, а через σ_2 — та часть σ, которая видна из P под отрицательным телесным углом. При достаточной гладкости поверхности S и во всяком случае для поверхности Ляпунова в силу условия г) оба интеграла

$$\iint\limits_{\sigma_1} d\omega \quad \text{и} \quad \iint\limits_{\sigma_2} d\omega,$$

будут ограничены[1]). Этого достаточно для непрерывности w_1. Второе слагаемое формулы (XV.8) легко вычисляется:

$$w_2(P)=\iint_S f_1(P_0)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}dS=f_1(P_0)\iint_S d\omega=f_1(P_0)\,\omega_S(P),$$

где $\omega_S(P)$ — величина телесного угла, под которым видна поверхность S из точки P.

Пусть w_{2e}, w_{2i}, w_0 обозначают соответственно пределы w_2 извне и изнутри и значение w при подстановке вместо точки P точки P_0 поверхности S. Чтобы разобраться в этих величинах, нам остаётся изучить поведение $\omega_S(P)$ при переходе через поверхность S в точке P_0.

Пусть точка P_0 пересекает поверхность S, двигаясь изнутри наружу. Пока P_0 находится внутри области, ограниченной поверхностью S, $\omega_S(P_0)=4\pi$. Как только P_0 пересекла поверхность S и оказалась вне её, $\omega_S(P_0)=0$. Следовательно, функция $\omega_S(P_0)$ терпит разрыв непрерывности при переходе через поверхность S. Остаётся определить значение $\omega_S(P_0)$, когда P_0 есть точка поверхности S. С этой целью окружим точку P_0 малой сферой σ радиуса η и рассмотрим линию l, по которой сфера σ пересекается с поверхностью S. Линия l разделяет поверхность сферы на две части — σ_1, внутреннюю по отношению к S, и σ_2 — внешнюю. Эта же линия делит поверхность S на две части — внешнюю по отношению к σ часть S_1 и внутреннюю S_2. Внешняя часть S_1 вместе с σ_1 образует замкнутую поверхность, вне которой находится точка P_0. Следовательно, телесный угол, под которым видна поверхность S_1 из точки P_0, равен углу, под которым видна из P_0 часть сферы σ_1.

Для того чтобы вычислить телесный угол, под которым видна из точки P_0 поверхность S, достаточно определить угол, под которым видна поверхность S_1, и перейти к пределу, устремляя радиус η сферы σ к нулю. По предыдущему, это равносильно нахождению предела угла, под которым видна из P_0 часть σ_1 сферы σ. Нетрудно доказать, что этот предел равен 2π. Пересечём сферу σ плоскостью, касательной к S в точке P_0. По доказанному выше, расстояние от точек линии l до касательной плоскости не превосходит $6A\eta^{1+\delta}$. Таким образом, линия l целиком находится внутри сферического пояса на сфере σ, определённого неравенством $|z|\leqslant 6A\eta^{1+\delta}$.

Построим на σ географическую систему координат, взяв за полярную ось нормаль к S в точке P_0. В этих координатах пояс, внутри

[1]) В более подробных курсах теории потенциала, например Гюнтер, La théorie du potentiel, выясняются те условия для поверхности, при которых ограниченность $\iint_S\left|\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right|dS$ имеет место.

которого заведомо заключена линия l, ограничен параллелями α_0 южной широты и α_0 северной широты, где

$$\alpha_0 = \arcsin \frac{6A\eta^{1+\delta}}{\eta} = \arcsin 6A\eta^{\delta}.$$

Угол α_0, очевидно, стремится к нулю. Следовательно, σ_1 стремится к поверхности полусферы и, значит, телесный угол, под которым σ_1 видна из P_0, стремится к 2π. Итак, $\omega_S(P_0) = 2\pi$, если P_0 лежит на поверхности S.

Отсюда

$$(\omega_S)_e = -2\pi + (\omega_S)_0, \qquad (\omega_S)_i = 2\pi + (\omega_S)_0.$$

При этом для w_2 будем иметь:

$$w_{2e} = -2\pi f_1(P_0) + (w_2)_0; \qquad w_{2i} = 2\pi f_1(P_0) + (w_2)_0.$$

Из непрерывности w_1 и формулы (XV.8) сразу следует (XV.7). Так как P_0 — произвольная точка поверхности S, то наша теорема доказана.

§ 3. Свойства потенциала простого слоя.

Подобно предыдущему исследуем потенциал простого слоя.

Выберем опять систему координат, как указано в начале этой лекции. Пусть

$$v(P) = \iint\limits_S \frac{1}{r} f_2(S)\,dS. \tag{XV.9}$$

Прежде всего заметим, что интеграл (XV.9) равномерно сходится при ограниченной непрерывной функции f_2 и, следовательно, является непрерывной функцией, включая поверхность S. В самом деле, если из поверхности S исключить ту её часть σ, которая попадёт внутрь малого шара радиуса η, описанного вокруг произвольной точки P_0, то в остальных точках S подинтегральная функция будет ограничена и непрерывна. Интеграл по σ будет сколь угодно мал при достаточно малом η независимо от P_0. Следовательно, интеграл (XV.9) непрерывен как функция точки P_0 всюду и, в частности, в любой точке поверхности S.

Составим производную $\frac{\partial v}{\partial z_0}$ и займёмся её исследованием. Мы будем иметь:

$$\frac{\partial v}{\partial z_0} = \iint\limits_S \frac{z - z_0}{r^3} f_2(S)\,dS.$$

Очевидно, $\frac{z-z_0}{r}$ есть взятый с обратным знаком косинус угла, составленного радиус-вектором, проведённым из точки (x, y, z) в точку (x_0, y_0, z_0), с направлением оси z.

Поэтому, обозначив этот угол через ψ_0, можем записать $\frac{\partial v}{\partial z_0}$ в виде

$$\frac{\partial v}{\partial z_0}=-\int\limits_S\int f_2(S)\frac{\cos\psi_0}{r^2}\,dS. \tag{XV.10}$$

Докажем два утверждения:

Лемма 3. *Интеграл* (XV.9) *сохраняет смысл, если в него вместо* (x_0, y_0, z_0) *подставить точку поверхности, и представляет собой непрерывную функцию точки* P_0.

В самом деле, полагая $x_0=y_0=z_0=0$ в формуле (XV.10) и пользуясь тем, что

$$|z|\leqslant M\rho^{1+\delta},\ \text{где}\ \rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

[см. (XV.5)], легко докажем это утверждение.

Будем обозначать такой интеграл через

$$\frac{\partial v}{\partial n_0}=\int\limits_S\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_0}f_2(S)\,dS.$$

Обозначим через $\frac{\partial v(P_0)}{\partial n_i}$ и $\frac{\partial v(P_0)}{\partial n_e}$ соответственно предельные значения нормальной производной при приближении точки P к точке поверхности P_0 изнутри S и извне S.

Теорема 2. *При непрерывной функции* f_2 *имеют место следующие формулы:*

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial n_e}&=2\pi f_2(P_0)+\frac{\partial v}{\partial n_0},\\ \frac{\partial v}{\partial n_i}&=-2\pi f_2(P_0)+\frac{\partial v}{\partial n_0}.\end{aligned}\right\} \tag{XV.11}$$

Для доказательства мы сравним $\frac{\partial v}{\partial z_0}$ с потенциалом двойного слоя с плотностью $-f_2(S)$.

Составим

$$\frac{\partial v}{\partial z_0}-w=\int\limits_S\int f_2(S)\frac{\cos\varphi-\cos\psi_0}{r^2}\,dS. \tag{XV.12}$$

Мы докажем, что эта разность непрерывна в точке (0, 0, 0). В самом деле,

$$\frac{\cos\varphi-\cos\psi_0}{r^2}=-\frac{x-x_0}{r^3}\cos(nx)-\frac{y-y_0}{r^3}\cos(ny)-\frac{z-z_0}{r^3}[\cos(nz)-1].$$

Для простоты положим, что точка x_0, y_0, z_0 движется по нормали к поверхности, т. е. $x_0 = y_0 = 0$.

При этом

$$\frac{\cos\varphi - \cos\psi_0}{r^2} = -\frac{x\cos(nx)}{r^3} - \frac{y\cos(ny)}{r^3} - \frac{z - z_0}{r^3}[\cos(nz) - 1].$$

Пользуясь оценками (XV.6), имеем:

$$|x\cos(nx)| \leqslant A_1\rho^{1+\delta}; \quad |y\cos(ny)| < A_1\rho^{1+\delta},$$
$$|1 - \cos(nz)| < A_1\rho^{\delta},$$

где A_1 — постоянная.

Замечая ещё, что

$$|z - z_0| < r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2},$$

мы получаем:

$$\left|\frac{\cos\varphi - \cos\psi_0}{r^2}\right| \leqslant \frac{2A_1\rho^{1+\delta}}{r^3} + \frac{A_1\rho^{\delta}}{r^2} \leqslant \frac{3A_1}{\rho^{2-\delta}}.$$

Значит, интеграл (XV.12) сходится равномерно по отношению к параметру z_0 и представляет собой непрерывную функцию в точке $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

Отсюда следует

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z_0} - w\right)_{z_0=+0} = \left(\frac{\partial v}{\partial z_0} - w\right)_{z_0=-0} = \left(\frac{\partial v}{\partial z_0} - w\right)_{z_0=0}.$$

Пользуясь теоремой 1 настоящей лекции, отсюда сразу получаем формулы (XV.11).

Отметим ещё одно важное обстоятельство. Оценка величины $\frac{\cos\varphi - \cos\psi_0}{r^2}$ является равномерной по отношению к точке поверхности S. Поэтому производная $\frac{\partial u}{\partial z_0}$ будет стремиться к своему предельному значению равномерно по всей поверхности S.

Теорема 3. *Для любой ограниченной функции $f_2(S)$ функция $\frac{\partial v}{\partial n}$ непрерывна.*

Доказательство этой теоремы сразу вытекает из того, что интеграл

$$\iint\limits_S f_2(S)\frac{\cos\psi_0}{r^3}\,dS$$

сходится равномерно. В самом деле, под интегралом стоит произведение ограниченного множителя на функцию $\frac{\cos\psi_0}{r^3}$, которая на основании (XV.6) не превосходит $6A\rho^{-2+\delta}$. По признаку 3 равномерной сходимости из лекции VII интеграл сходится равномерно и, следовательно, представляет собой непрерывную функцию.

Теорема 4. *Если плотность простого слоя удовлетворяет условию*

$$|f_2(P_1) - f_2(P_2)| \leqslant K r_3^{\delta_1}, \tag{XV.13}$$

где $\delta_1 > 0$, *а* r_3 — *расстояние между точками* P_1 *и* P_2, *то потенциал будет иметь непрерывные вплоть до контура производные 1-го порядка по направлению, параллельному касательной плоскости, с обеих сторон рассматриваемой поверхности.*

Выберем опять начало координат в исследуемой точке P_1 поверхности и за плоскость XOY возьмём касательную плоскость к поверхности.

Рассмотрим производную

$$\frac{\partial v}{\partial x_0} = \iint\limits_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_0} f_2(S)\, dS$$

в некоторой точке P_0 с координатами 0, 0, z_0, лежащей на нормали. Докажем, что эта производная непрерывна на всей нормали, в том числе и при $z_0 = 0$.

В самом деле, мы имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial x_0} = \iint\limits_S \frac{x}{r^3} f_2(S)\, dS.$$

Построим вокруг оси z цилиндр радиуса h такой, что в точках куска S^* поверхности S, попавшего внутрь этого цилиндра в окрестности P_0, нормаль к S образует угол с осью z, не превосходящий $\frac{\pi}{4}$. Покажем, что при этом $|z| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$. В самом деле, $z = \int\limits_0^\rho \frac{dz}{d\rho} d\rho$, $|z| \leqslant \rho \max \left|\frac{dz}{d\rho}\right|$. Но в силу условия

$$|\cos(nz)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

имеем:

$$\left|\frac{dz}{d\rho}\right| \leqslant \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} < 1,$$

откуда и следует наше неравенство.

Пусть $r^* = \sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}$. Построим интеграл:

$$\iint\limits_{S^*} f_2(P_1) \frac{x}{r^{*3}} \cos(nz)\, dS.$$

Этот интеграл, очевидно, равен нулю, ибо его можно переписать в виде

$$f_2(P_1)\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z_0^2)^3}}\,dx\,dy,$$

где под интегралом стоит нечётная функция от x.

Очевидно, непрерывность $\frac{\partial v}{\partial x_0}$ будет установлена, если мы докажем непрерывность интеграла

$$\iint\limits_{S^*}x\left(\frac{f_2(S)}{r^3}\right)dS \quad \text{или} \quad \iint\limits_{S^*}x\left(\frac{f_2(S)}{r^3}-\frac{f_2(P)\cos(nz)}{r^{*3}}\right)dS. \qquad \text{(XV.14)}$$

Нетрудно убедиться в равномерной сходимости в точке P_1 этого последнего интеграла. В самом деле, имеем:

$$\frac{f_2(S)}{r^3}-\frac{f_2(P_1)}{r^{*3}}\cos(nz)=\frac{f_2(S)-f_2(P_1)}{r^3}+\frac{f_2(P_1)[1-\cos(nz)]}{r^3}+$$
$$+f_2(P_1)\cos(nz)\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r^{*3}}\right). \qquad \text{(XV.15)}$$

Оценим порознь каждое из слагаемых правой части формулы (XV.15). Мы имеем: $r=\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}\geqslant\rho$; $r^*>\rho$;

$$r_3=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leqslant\sqrt{2}\rho,$$

$$\left|\frac{f_2(S)-f_2(P_1)}{r^3}\right|\leqslant\frac{Kr_3^{\delta_1}}{r^3}\leqslant\frac{K_1}{\rho^{3-\delta_1}}.$$

Из (XV.4) следует:

$$\left|\frac{f_2(P_1)[1-\cos(nz)]}{r^3}\right|\leqslant|f_2(P_1)|A\frac{\rho^\delta}{r^3}\leqslant\frac{K_2}{\rho^{3-\delta}}.$$

Далее,

$$\left|\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r^{*3}}\right|=|r-r^*|\left\{\frac{1}{r^3r^*}+\frac{1}{r^2r^{*2}}+\frac{1}{rr^{*3}}\right\}.$$

Разность векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}^*$ представляет собой отрезок длины z. Поэтому в силу (XV.5)

$$|r-r^*|\leqslant|z|\leqslant K\rho^{1+\delta}.$$

Пользуясь этим, имеем:

$$\left|\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r^{*3}}\right|\leqslant K_3\rho^{1+\delta}\left\{\frac{1}{r^3r^*}+\frac{1}{r^2r}+\frac{1}{r^1r^{*3}}\right\}\leqslant K_4\frac{1}{\rho^{3-\delta}}.$$

Возвращаясь к интегралу (XV.14), мы видим, что он может быть переписан в виде

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2} \frac{x}{\cos(nz)}\left(\frac{f_2(S)}{r^3}-\frac{f_2(P_1)\cos(nz)}{r^{*3}}\right)dx\,dy.$$

Подинтегральная функция в этом интеграле не превосходит

$$\sqrt{2}\rho\left(\frac{K_1+K_2+K_4}{\rho^{3-\delta}}\right)=\frac{K_5}{\rho^{2-\delta}}.$$

Следовательно, интеграл сходится равномерно.

Мы установили, что при стремлении точки P_0 по нормали к точке поверхности все первые производные от потенциала простого слоя стремятся к определённому конечному пределу.

Из нашего доказательства вытекает, между прочим, что это стремление будет равномерным по отношению к точке поверхности. Следовательно, производные первого порядка от потенциала простого слоя будут в наших предположениях непрерывны вплоть до границы что и доказывает нашу теорему.

§ 4. Правильная нормальная производная.

В дальнейшем нам придётся применять формулу Грина к гармоническим функциям, представленным в виде потенциалов простого или двойного слоя. Для того чтобы иметь возможность это делать, мы должны наложить дополнительные ограничения на поверхность S.

Сделаем прежде всего одно важное замечание. Формула Грина (V. 16) была получена нами в предположении непрерывности первых производных от функций u и v вплоть до границы и интегрируемости Δu и Δv внутри области.

Допустим, что наша поверхность S такова, что функции, которыми она задана в параметрическом представлении:

$$x=x(\lambda,\mu),\quad y=y(\lambda,\mu),\quad z=z(\lambda,\mu), \tag{XV.16}$$

допускают непрерывные производные по параметрам до второго порядка включительно.

В каждой точке этой поверхности построим нормаль n и отложим на этой нормали отрезок постоянной длины ζ. Геометрическое место концов этих отрезков описывается уравнениями

$$x_1=x+\zeta\cos nx,\quad y_1=y+\zeta\cos ny,\quad z_1=z+\zeta\cos nz.$$

Это множество точек образует некоторую поверхность S_1, которую можно назвать поверхностью, параллельной поверхности S.

Легко убедиться в том, что поверхность S_1 имеет непрерывно меняющуюся касательную плоскость. Для этого рассмотрим уравнение поверхности S в параметрической форме (XV.16). Составляющие вектора нормали $n_x(\lambda, \mu)$, $n_y(\lambda, \mu)$, $n_z(\lambda, \mu)$ непрерывно дифференцируемы один раз по λ и μ. Подставляя эти выражения в уравнения для x_1, y_1, z_1, получим параметрическое представление для S_1, которое, очевидно, будет допускать непрерывные производные первого порядка по λ и μ и, значит, поверхность S_1 будет иметь непрерывно изменяющуюся касательную плоскость.

Предположим, что функции u и v таковы, что функции Δu и Δv непрерывны внутри области Ω. Пусть u и v имеют непрерывную нормальную производную на любой поверхности S_1, «параллельной» S и лежащей внутри нее.

Предположим ещё, что нормальные производные $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_1}$ и $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{S_1}$, определённые на поверхности S_1, равномерно стремятся к непрерывным предельным функциям $\varphi_1(S)$ и $\varphi_2(S)$. Эти функции мы будем называть нормальными производными от u и v на поверхности S и обозначать через $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S$ и $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S$.

Мы будем говорить в этом случае, что функции u и v обладают правильными нормальными производными.

Теорема 5. *Если u и v — две гармонические в области Ω функции, допускающие правильные нормальные производные, то для них имеет место формула Грина*

$$\iint\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS = 0.$$

Доказательство этой теоремы очевидно. Достаточно применить формулу Грина к поверхности S_1, «параллельной» данной поверхности S, и затем перейти к пределу при стремлении S_1 к S.

Из леммы 2 настоящей лекции вытекает, что при непрерывной плотности $f_2(S)$ потенциал простого слоя обладает правильной нормальной производной.

§ 5. Нормальная производная потенциала двойного слоя.

Для потенциала двойного слоя мы получим условие существования правильной нормальной производной в виде следующей теоремы.

Теорема Ляпунова. *Для того, чтобы решение уравнения Лапласа*

$$\Delta u = 0$$

в области Ω, ограниченной поверхностью S_1, удовлетворяющее условию

$$u|_S = f(S)$$

(решение задачи Дирихле), допускало правильную нормальную производную, необходимо и достаточно, чтобы потенциал двойного слоя W, образованный с помощью функции $f(S)$:

$$W = \frac{1}{4\pi} \iint_S f \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS,$$

имел правильную нормальную производную как извне, так и изнутри и чтобы эти нормальные производные совпадали.

Докажем эту теорему. Рассмотрим функцию $w(P_0)$:

$$w(P_0) = \begin{cases} u - W, & \text{если } P_0 \text{ внутри } \Omega; \\ \\ -W, & \text{если } P_0 \text{ вне } \Omega. \end{cases}$$

Функция $w(P_0)$ будет гармонической как внутри области Ω, так и вне её. Можно доказать, что она непрерывна во всем пространстве. В самом деле, скачок функции $w(P_0)$ при переходе через поверхность S, как легко видеть, равняется

$$u(P_0)|_S - f(S) = 0.$$

Если функция $u(P_0)$ допускает правильную нормальную производную $\frac{\partial u}{\partial n}$, то функция $w(P_0)$ будет совпадать с потенциалом простого слоя

$$V(P_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

имеющим тот же скачок нормальной производной, что и u. Действительно, при этом внутри области Ω, в силу формулы Грина, имеем:

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S f \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

и, следовательно, $w(P_0) - V(P_0) = 0$ везде внутри Ω. Ввиду непрерывности этой разности она будет равна нулю и вне Ω.

Но отсюда следует, что она равна нулю тождественно, и, значит, имеем:

$$-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S f\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS=\begin{cases} u(P_0)+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS, & \text{если } P_0 \text{ внутри } \Omega;\\ \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS, & \text{если } P_0 \text{ вне } \Omega.\end{cases}$$

Таким образом, потенциал двойного слоя W представляется в виде разности двух функций, обладающих правильной нормальной производной с обеих сторон поверхности S и, следовательно, сам обладает с обеих сторон S правильной нормальной производной. Скачок этой производной, очевидно, равен нулю. Следовательно, предельные значения нормальной производной извне и изнутри совпадают.

Мы доказали необходимость условия теоремы. Покажем теперь достаточность этого условия. Прежде всего заметим, что если будет существовать непрерывная правильная внешняя производная от функции W, то функцию w можно рассматривать вне Ω как решение задачи Неймана с заданными непрерывными значениями внешней нормальной производной:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_e=\left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_e.$$

Но решение такой задачи, как мы увидим в лекции XIX, представимо в виде потенциала простого слоя V^* с непрерывной плотностью $\nu(S)$. Такой потенциал будет совпадать везде с функцией $w(P_0)$, ибо их разность $V^*(P_0)-w(P_0)$ непрерывна во всём пространстве и тождественно равна нулю вне Ω.

Значит, изнутри будет существовать правильная нормальная производная $\frac{\partial w}{\partial n_0}$. Но внутри области Ω имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial W}{\partial n}+\frac{\partial w}{\partial n}.$$

Из существования правильных нормальных производных от w и W следует, что существует правильная нормальная производная от u, что и требовалось доказать.

§ 6. Поведение потенциалов в бесконечности.

Последнее важное свойство потенциалов простого и двойного слоёв, которое мы сейчас разберём, — это их поведение на бесконечности.

Мы докажем, что если поверхность S ограничена, потенциал простого слоя убывает на бесконечности, по крайней мере как $\frac{1}{R_0}$, а потенциал двойного слоя, по крайней мере как $\frac{1}{R_0^2}$, где $R_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

В самом деле, очевидно, что при достаточно большом R_0 получим:

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}= \\
&= \sqrt{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)-2(xx_0+yy_0+zz_0)+(x^2+y^2+z^2)}= \\
&= \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\sqrt{1-\frac{2(xx_0+yy_0+zz_0)-(x^2+y^2+z^2)}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}}\geqslant \\
&\geqslant R_0\sqrt{1-\frac{2RR_0-R^2}{R_0^2}}\geqslant\frac{1}{2}R_0.
\end{aligned}
$$

Значит,

$$
|v|=\left|\iint\limits_S \frac{1}{r}f_2(S)\,dS\right|\leqslant\frac{2}{R_0}\iint\limits_S |f_2(S)|\,dS,
$$

$$
|w|=\left|\iint\limits_S \frac{\cos\varphi}{r^2}f_1(S)\,dS\right|\leqslant\frac{4}{R_0^2}\iint\limits_S |f_1(S)|\,dS,
$$

что и требовалось доказать.

ЛЕКЦИЯ XVI.

СВЕДЕНИЕ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА.

§ 1. Постановка задач и единственность их решений.

Пусть S — замкнутая, достаточно гладкая поверхность. Обозначим через Ω_1 объём, ограниченный этой поверхностью, а через Ω_2 — бесконечную область, внешнюю по отношению к S, также ограниченную поверхностью S.

Рассмотрим четыре задачи:

1. Внутренняя задача Дирихле. Найти функцию u, гармоническую в Ω_1, при условии

$$u|_S = f_1(S).$$

2. Внешняя задача Дирихле. Найти функцию u, гармоническую в Ω_2, при условиях:

а) $u|_S = f_1(S)$,

б) $\lim\limits_{R \to \infty} u = 0$.

3) Внутренняя задача Неймана. Найти функцию u, гармоническую в Ω_1, при условии

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f_2(S).$$

4. Внешняя задача Неймана. Найти функцию u, гармоническую в Ω_2, при условиях:

а) $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f_2(S)$,

б) $\lim\limits_{R \to \infty} u = 0$.

Прежде чем намечать пути решения этих задач, займёмся их исследованием.

Теорема 1. *Решение задачи Дирихле, внутренней или внешней, единственно.*

Доказательство совершенно очевидно. Оно вытекает из принципа максимума. Разность двух решений в случае внутренней задачи будет гармонической функцией, равной нулю на S; в случае внешней задачи разность двух решений будет равна нулю на S и на бесконечности. Следовательно, разность решений не может принимать внутри области ни положительных, ни отрицательных значений, ибо иначе она достигала бы там своего положительного максимума или своего отрицательного минимума, что невозможно. Значит, в обоих случаях разность решений равна нулю.

Теорема 2. *Решение внешней задачи Неймана, имеющее непрерывные вплоть до границы производные 1-го порядка, единственно, решение внутренней задачи определено с точностью до произвольной постоянной.*

Разберём сначала внутреннюю задачу. Составим интеграл:

$$\iint_S v\frac{\partial v}{\partial n}\,dS =$$

$$= -\iiint_{\Omega_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz =$$

$$= -\iiint_{\Omega_1}\left[v\,\Delta v+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz.$$

Если теперь v — гармоническая функция и $\frac{\partial v}{\partial n}$ обращается в нуль на контуре, то

$$\iiint_{\Omega_1}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz = 0,$$

и, значит,

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z}=0.$$

Отсюда следует, что v — постоянная.

Пусть теперь u_1, u_2 — два решения внутренней задачи Неймана. Их разность v является гармонической функцией, нормальная производная которой на границе области равна нулю. По доказанному такая функция есть постоянная. Теорема доказана для случая внутренней задачи.

Внутренняя задача Неймана разрешима не всегда. Необходимым и достаточным условием её разрешимости является равенство

$$\iint_S f_2(S)\,dS = 0.$$

Необходимость этого условия очевидным образом вытекает из формулы Грина. Достаточность мы установим позднее.

Для рассмотрения внешней задачи возьмём сферу Σ радиуса A, где A — достаточно большое число, и пусть Ω_3 — объём, заключённый между Σ и S. По предыдущему

$$\iint_\Sigma v\frac{\partial v}{\partial n}\,dS + \iint_S v\frac{\partial v}{\partial n}\,dS =$$
$$= -\iiint_{\Omega_3}\left[v\,\Delta v + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz.$$

Если v — гармоническая функция, стремящаяся к нулю на бесконечности, и притом такая, что $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S = 0$, то левая часть последнего равенства сколь угодно мала. В самом деле, в силу теоремы 1 лекции XII на Σ имеем:

$$|v| \leqslant \frac{M}{A}, \quad \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right| \leqslant \frac{M}{A^2}$$

и

$$\left|\iint_\Sigma v\frac{\partial v}{\partial n}\,dS\right| \leqslant \frac{M^2}{A^3}\iint_\Sigma dS = 4\pi\frac{M^2}{A}.$$

Значит,

$$\iiint_{\Omega_3}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz < \varepsilon,$$

при любом $\varepsilon > 0$, что возможно лишь при условии

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Значит, v есть постоянная. Но эта постоянная может быть только нулём, так как иначе она не стремилась бы к нулю на бесконечности.

Разность двух решений внешней задачи Неймана есть поэтому нуль, и решение задачи Неймана единственно.

§ 2. Интегральные уравнения для поставленных задач.

Полученные нами в предыдущей лекции свойства потенциалов позволяют решать задачи Дирихле и Неймана для любых областей, ограниченных достаточно гладкими поверхностями, приведением их к интегральным уравнениям.

В самом деле, пусть мы хотим найти, например, решение внутренней задачи Дирихле. Будем предполагать, что искомая функция u

есть потенциал двойного слоя w с неизвестной пока плотностью $\mu(S)$:

$$u = w = \int\limits_S\int \frac{\mu(S_1)\cos\varphi}{r^2}\,dS_1.$$

Как известно, потенциал двойного слоя есть гармоническая функция. Мы должны подчинить w тому условию, чтобы её предельное значение изнутри равнялось $f_1(S)$:

$$w_i = f_1(S).$$

Из равенств (XV.7) имеем

$$w_i = 2\pi\mu(S) + w_0 = 2\pi\mu(S) + \int\limits_S\int \frac{\mu(S_1)\cos\varphi}{r^2}\,dS_1,$$

где r — расстояние между двумя точками S и S_1 нашей поверхности. Таким образом, для $\mu(S)$ получим уравнение:

$$\mu(S) = \frac{f_1(S)}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_S\int \frac{\mu(S_1)\cos\varphi}{r^2}\,dS_1. \tag{XVI.1}$$

Если для сокращения письма обозначить $\frac{1}{2\pi}f_1(S)$ через $F_1(S)$, а $\frac{1}{2\pi}\frac{\cos\varphi}{r^2}$ — через $K(S, S_1)$ (это последнее выражение есть, очевидно, функция двух точек, S и S_1, на поверхности), то мы придём к уравнению

$$\mu(S) = F_1(S) - \int\limits_S\int K(S, S_1)\,\mu(S_1)\,dS_1. \tag{XVI.2}$$

Интегральные уравнения такого вида называются интегральными уравнениями типа Фредгольма 2-го рода. К изучению таких уравнений мы вскоре перейдём.

Так же точно можно свести и задачу Дирихле для внешней области, ограниченной поверхностью S, т. е. для бесконечной области, границей которой служит S, опять к уравнению Фредгольма 2-го рода.

В самом деле, отыскивая решение снова в виде потенциала двойного слоя из условия $w_e = f_1(S)$, получим, аналогично прежнему, для неизвестной плотности $\mu(S)$

$$w_e = -2\pi\mu(S) + w_0,$$

откуда

$$\mu(S) = -\frac{f_1(S)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_S\int \frac{\mu(S_1)\cos\varphi}{r^2}\,dS;$$

обозначая $-\frac{f_1(S)}{2\pi}$ через $\Phi_1(S)$, получим:

$$\mu(S) = \Phi_1(S) + \int\limits_S\int K(S, S_1)\,\mu(S_1)\,dS. \tag{XVI.3}$$

Это уравнение есть уравнение того же типа и рода, что и предыдущее.

К интегральным уравнениям приводится и решение задачи Неймана для внутренности и для внешности поверхности.

Будем искать решение *внутренней задачи Неймана* в виде потенциала простого слоя:

$$u = v = \int\limits_S\int \frac{\nu(S_1)}{r}\,dS_1,$$

аналогично прежнему

$$\frac{\partial v}{\partial n_i} = -2\pi\nu(S) + \frac{\partial v}{\partial n_0} = f_2(S),$$

откуда

$$\nu(S) = -\frac{f_2(S)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_S\int \frac{\nu(S_1)\cos\psi_0}{r^2}\,dS_1. \qquad \text{(XVI.4)}$$

Угол ψ_0 получается из угла φ заменой положения точки S на S_1. Поэтому, полагая $-\frac{f_2(S)}{2\pi} = F_2(S)$, получим для $\nu(S)$ уравнение:

$$\nu(S) = F_2(S) + \int\limits_S\int K(S_1, S)\,\nu(S_1)\,dS_1. \qquad \text{(XVI.5)}$$

Наконец, если искать решение *внешней задачи Неймана* в виде потенциала простого слоя v, будем иметь:

$$\frac{\partial v}{\partial n_0} = 2\pi\nu(S) + \int\limits_S\int \nu(S_1)\,\frac{\cos\psi_0}{r^2}\,dS_1 = f_2(S)$$

или

$$\nu(S) = \frac{f_2(S)}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_S\int \frac{\nu(S_1)\cos\psi_0\,dS_1}{r^2}.$$

Полагая

$$\frac{f_2(S)}{2\pi} = \Phi_2(S),$$

получим для $\nu(S)$ уравнение:

$$\nu(S) = \Phi_2(S) - \int\limits_S\int K(S_1, S)\,\nu(S_1)\,dS_1. \qquad \text{(XVI.6)}$$

Если нам удастся найти функции μ и ν, удовлетворяющие уравнениям (XVI.2), (XVI.3), (XVI.5) или (XVI.6), то соответствующие задачи математической физики будут решены.

ЛЕКЦИЯ XVII.

УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА НА ПЛОСКОСТИ.

§ 1. Фундаментальное решение.

Мы разобрали довольно подробно уравнения Лапласа и Пуассона в пространстве. На практике часто бывает, что функция u не зависит от одного из переменных, например z; тогда

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

При этом уравнения переходят в уравнения с двумя независимыми переменными. Те же самые задачи, которые мы ставили для пространства, мы можем теперь ставить на плоскости XOY для уравнения

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\rho(x, y)\qquad .$$

где $\rho(x,y)$ может иногда равняться нулю тождественно.

Рассмотрим некоторые свойства таких двумерных задач, отличающие их от трёхмерного случая.

Совершенно так же, как и в пространстве, легко доказать, что функция, гармоническая в некоторой области D плоскости XOY, достигает своего максимального и минимального значений на контуре этой области. Отсюда следует, в силу прежних рассуждений, единственность решения задачи Дирихле для любой ограниченной области. Однако, как мы увидим далее, в отличие от прежнего задача Дирихле для неограниченной области в прежней постановке смысла не имеет. Ставить вопрос об отыскании гармонической функции, равной нулю на бесконечности, здесь нельзя, и вопрос о единственности такого решения лишён содержания.

Аналогично леммам, доказанным нами в лекции IX, мы имеем здесь две другие леммы.

Лемма 1. *Функция* $\ln\frac{1}{r}=-\ln r$, *где* $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, *есть гармоническая функция переменных* x *и* y.

В самом деле,

$$-\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^2} + \frac{2(x-x_0)^2}{r^4},$$

$$-\frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^2} + \frac{2(y-y_0)^2}{r^4},$$

откуда

$$\Delta \ln \frac{1}{r} = 0.$$

Лемма 2. *Для любой непрерывной со своими производными 2-го порядка функции имеет место формула*

$$u(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_D\int \ln\frac{1}{r}\Delta u\,dx\,dy + \frac{1}{2\pi}\int\limits_s\left(u\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial n} - \ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds, \qquad \text{(XVII.1)}$$

где D — некоторая область, содержащая внутри себя точку (x_0, y_0), а s — контур этой области. Здесь через $\frac{\partial}{\partial n}$ обозначена производная по направлению внутренней нормали к контуру s.

Если точка (x_0, y_0) лежит вне области D, то формула (XVII.1) заменяется другой:

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_D\int \ln\frac{1}{r}\Delta u\,dx\,dy + \frac{1}{2\pi}\int\limits_s\left(u\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial n} - \ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds = 0. \qquad \text{(XVII.2)}$$

Доказательство этих формул не представляет труда, совпадая слово в слово с уже проведённым однажды доказательством аналогичной формулы в пространстве. Мы не будем приводить этого доказательства.

Так же, как и раньше, можно доказать, что если функция u имеет начало координат особой точкой и в окрестности начала является гармонической, причём удовлетворяет неравенству

$$|u| \leqslant \frac{A}{R^n},$$

где $R = \sqrt{x^2+y^2}$, то её можно представить в виде

$$u = \sum_{m=0}^{n}\sum_{i+j=m} a_{ij}\frac{\partial^m \ln\frac{1}{R}}{\partial x^i \partial y^j} + u^*, \qquad \text{(XVII.3)}$$

где u^* — гармоническая функция во всей области, включая начало координат.

Справедливы теоремы:

Теорема 1. *Если $u(R, \vartheta)$ — гармоническая функция, то и $v(R, \vartheta) = u\left(\frac{1}{R}, \vartheta\right)$ гармонична.* (Здесь R и ϑ — полярные координаты на плоскости.)

Теорема 2. *Если $u(R, \vartheta)$ гармонична при больших значениях R и удовлетворяет неравенству*

$$|u| \leqslant AR^n,$$

то её можно представить в виде

$$u = \sum_{m=1}^{n} \sum_{i+j=m} a_{ij} R^{2m} \frac{\partial^m \ln \frac{1}{R}}{\partial x^i \partial y^j} + u^*,$$

где u^* ограничена.

§ 2. Основные задачи.

Задача о нахождении решения уравнения Пуассона

$$\Delta u = \rho(x, y)$$

на всей плоскости, обращающегося в нуль на бесконечности, для уравнения с двумя переменными, вообще говоря, неразрешима, и мы не будем её касаться. Заметим, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho \ln \frac{1}{r}\, dx\, dy$, распространённый по всей плоскости (если ρ отлично от нуля лишь в конечной области, то область будет фактически конечной), есть всё же частное решение уравнения Пуассона, но, вообще говоря, неограниченно растущее на бесконечности. Этот интеграл называется логарифмическим потенциалом распределённых масс.

Задача Дирихле для полуплоскости имеет смысл. Пусть функция $f_1(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|f_1(x)| < \frac{A}{x^\alpha}, \quad \text{где} \quad \alpha > 0.$$

Решение уравнения

$$\Delta u = 0$$

при условии

$$u|_{y=0} = f_1(x),$$

обращающееся в нуль на бесконечности, имеет вид

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n} f_1(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\varphi}{r} f_1(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\, d\omega(x;\ x_0, y_0),$$

где φ — угол, образуемый радиус-вектором, проведённым из точки $(x, 0)$ в точку (x_0, y_0) с направлением нормали к границе области в точке $(x, 0)$.

Доказательство читатель легко проведёт сам.

Задача Неймана для полуплоскости не только равных нулю на бесконечности, но даже и просто ограниченных решений не имеет. Мы не будем её касаться.

Если записать формально потенциал простого слоя

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\frac{1}{r} f_2(x)\,dx,$$

то этот интеграл будет неограниченно возрастать при удалении точки (x_0, y_0) на бесконечность.

Задача Дирихле для круга решается приёмом, аналогичным прежнему.

Если точка (x_1, y_1) — сопряжённая по отношению к точке (x_0, y_0), т. е.

$$x_1 = \frac{x_0}{x_0^2+y_0^2}, \quad y_1 = \frac{y_0}{x_0^2+y_0^2},$$

то на круге радиуса 1 попрежнему $r = R_0 r_1$, где

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

$$r_1 = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2},$$

а R_0 — радиус-вектор точки (x_0, y_0).

Пусть (x_0, y_0) — внутренняя точка круга $R \leqslant 1$. Применяя формулу Грина к решению уравнения $\Delta u = \rho$, будем иметь:

$$u(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_{R\leqslant 1} \ln\frac{1}{r}\rho\,dx\,dy +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{R=1}\left(u\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial n} - \ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds. \quad \text{(XVII.4)}$$

Применим теперь формулу Грина, подставив вместо r величину $R_0 r_1$. Ввиду того, что (x_1, y_1) лежит вне круга, функция $\ln\frac{1}{R_0 r_1}$ — гармоническая везде внутри, и мы получим:

$$-\frac{1}{2\pi}\int\int_{R\leqslant 1} \ln\frac{1}{R_0 r_1}\rho\,dx\,dy +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{R=1}\left(u\frac{\partial \ln\frac{1}{R_0 r_1}}{\partial n} - \ln\frac{1}{R_0 r_1}\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds = 0. \quad \text{(XVII.5)}$$

Вычитая формулу (XVII.5) из (XVII.4) и обозначая

$$G(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_0 r_1} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r},$$

получим формулу:

$$u(x_0, y_0) = \iint\limits_{R \leqslant 1} \rho G(x, y, x_0, y_0)\, dx\, dy - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{R=1} u \frac{\partial G}{\partial n} ds. \quad \text{(XVII.6)}$$

Функция Грина G — симметрическая функция точек (x, y) и (x_0, y_0); следовательно, она гармоническая по x_0, y_0 и обращается в тождественный нуль по x, y, если (x_0, y_0) лежит на контуре.

Если задача отыскания решения уравнения Пуассона, удовлетворяющего условию

$$u|_s = f_1(s), \quad \text{(XVII.7)}$$

имеет решение, то это решение должно иметь вид (XVII.6). В частном случае, когда

$$u|_s = 0,$$

решение задачи даётся формулой

$$u(x_0, y_0) = \iint\limits_{R \leqslant 1} \rho G\, dx\, dy. \quad \text{(XVII.8)}$$

Легко проверить, что функция u, выражаемая формулой (XVII.8), является решением задачи.

В самом деле,

$$\iint\limits_{R \leqslant 1} \rho G\, dx\, dy = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{R \leqslant 1} \rho \ln \frac{1}{r}\, dx\, dy + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{R \leqslant 1} \rho \ln \frac{1}{R_0 r_1}\, dx\, dy.$$

Первое слагаемое, являясь логарифмическим потенциалом распределённых масс, удовлетворяет уравнению

$$\Delta v = \rho,$$

а второе — гармоническая функция.

Следовательно, формула (XVII.8) даст решение уравнения Пуассона. Непосредственно видно, что это решение удовлетворяет условию $u|_s = 0$.

Преобразуем формулу (XVII.6), подставив в неё явное выражение функции G. В полярных координатах, заменяя x, y через R и θ, а x_0, y_0 — через R_0, θ_0, получим для координат точки x_1, y_1 выражения $\frac{1}{R_0}$, θ_0.

При этом

$$\ln\frac{1}{r}=\frac{1}{2}\ln\left[R^2+R_0^2-2RR_0\cos(\theta-\theta_0)\right],$$

$$\ln\frac{1}{R_0r_1}=-\frac{1}{2}\ln\left[R^2R_0^2-2RR_0\cos(\theta-\theta_0)+1\right].$$

Тогда функция Грина запишется в виде:

$$G=\frac{1}{4\pi}\left\{\ln\left[R^2+R_0^2-2RR_0\cos(\theta-\theta_0)\right]-\right.$$
$$\left.-\ln\left[R^2R_0^2-2RR_0\cos(\theta-\theta_0)+1\right]\right\}$$

и

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{R=1}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-R+R_0\cos(\theta-\theta_0)}{R^2+R_0^2-2RR_0\cos(\theta-\theta_0)}-\frac{-RR_0^2+R_0\cos(\theta-\theta_0)}{R^2R_0^2-2RR_0\cos(\theta-\theta_0)+1}\right]_{R=1}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1-R_0^2}{R_0^2-2R_0\cos(\theta-\theta_0)+1}.$$

Решение задачи Дирихле для круга даётся при этом формулой

$$u(R_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-R_0^2}{R_0^2-2R_0\cos(\theta-\theta_0)+1}f_1(\theta)\,d\theta.$$

Эта формула называется *формулой Пуассона.*

Так же, как и в пространственном случае, проверяется, что эта формула действительно даёт решение поставленной задачи.

Аналогично решается задача Дирихле для внешности круга.

Эта задача ставится как задача отыскания функции u, гармонической вне круга $R=1$, удовлетворяющей условию $u|_s=f_1(s)$ и *ограниченной* на бесконечности. Это последнее условие существенно отличает задачу Дирихле для плоскости от задачи Дирихле в пространстве. Мы не будем останавливаться на решении этой задачи.

Формула, дающая решение этой задачи, будет иметь вид:

$$u(R_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{R_0^2-1}{R_0^2-2R_0\cos(\theta-\theta_0)+1}f_1(\theta)\,d\theta.$$

Из формулы Пуассона для гармонических функций внутри и вне круга следуют, почти без изменения в способе доказательства, все те же следствия, что и для пространственной задачи.

§ 3. Логарифмический потенциал.

На функции двух переменных можно перенести также понятие о потенциалах.

Интеграл вида

$$v = \int_s \ln \frac{1}{r} \mu(s)\, ds$$

называется логарифмическим потенциалом простого слоя. Это — гармоническая функция вне и внутри области D, ограниченной контуром s. Функция эта непрерывна при переходе через s, а её нормальная производная терпит разрыв непрерывности.

Если составить интеграл

$$\int_s \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n_0} \mu(s)\, ds,$$

где производные взяты при изменении x_0 и y_0, то он оказывается имеющим смысл в случае, если точка (x_0, y_0) лежит на границе. Обозначая его величину через $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_0$, получим:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_e = \pi\mu + \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_0,$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_i = -\pi\mu + \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_0.$$

Величину $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_0$ можно представить в виде

$$\int_s \mu \frac{\cos \psi_0}{r}\, ds,$$

где угол ψ_0 есть угол, составленный радиус-вектором, проведённым из точки (x, y) в точку (x_0, y_0), с направлением нормали в этой последней точке. Функция $\frac{\cos \psi_0}{r}$ есть ограниченная функция, если только линия s достаточно гладкая.

Логарифмический потенциал простого слоя, вообще говоря, не ограничен на бесконечности. Интеграл вида

$$w = \int_s \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n} \mu(s)\, ds = \int_s \frac{\mu(s) \cos \varphi}{r}\, ds,$$

где φ — угол, составленный радиус-вектором, проведённым из точки (x, y) в точку (x_0, y_0), с направлением нормали в точке (x, y), называется логарифмическим потенциалом двойного слоя. Это — гармоническая функция как внутри, так и вне области D, ограниченной контуром s. На контуре s эта функция терпит разрыв непрерывности.

Если (x_0, y_0) лежит на контуре, который мы предполагаем достаточно гладким, то $\frac{\cos\varphi}{r}$ — ограниченная функция, и интеграл w имеет смысл. Обозначая при этом его величину через w_0, будем иметь

$$w_e = -\pi\mu + w_0,$$
$$w_i = \pi\mu + w_0.$$

Логарифмический потенциал двойного слоя равен нулю на бесконечности.

Аналогично пространственному случаю можно поставить задачи Дирихле и Неймана также и для плоскости. При этом, однако, будут некоторые особенности во внешних задачах.

Во внешней задаче Дирихле вместо обращения u в нуль на бесконечности нужно требовать ограниченности этой функции в окрестности бесконечно удалённой точки.

При этом задача Дирихле получает определённое и единственное решение. Во внешней задаче Неймана нужно попрежнему искать решение, равное нулю на бесконечности, но в отличие от прежнего эта задача уже не будет, вообще говоря, иметь решения.

Необходимое и достаточное условие существования такого решения будет:

$$\int_l f_2(s)\,ds = 0,$$

где $f_2(s)$ — значения нормальной производной на контуре.

В этом смысле плоские задачи, внутренние и внешние, более сходны между собой, чем пространственные. Читателю будет полезно доказать эти утверждения самостоятельно.

Можно аналогично прежнему свести задачу Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям. Мы также предоставляем сделать это читателю.

Для плоской задачи интегрирования уравнения Лапласа существует ещё один чрезвычайно мощный метод, основанный на применении теории функций комплексного переменного Мы укажем лишь сущность этого метода, не останавливаясь на нём подробно.

Рассмотрим какую-либо аналитическую функцию $w(z) = u + iv$ комплексного переменного $z = x + iy$. Считая независимыми переменными x и y и применяя опе атор Лапласа к w, получим:

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = w''(z) + i^2 w''(z) = 0.$$

Отсюда следует, что функция $w(z)$ является гармонической функцией переменных x, y. Следовательно, её действительная и мнимая части $u(x, y)$ и $v(x, y)$ порознь будут гармоническими в области аналитичности $w(z)$.

Введём новое независимое комплексное переменное $\zeta = \xi + i\eta$, положив

$$z = \psi(\zeta),$$

где ψ — какая-то аналитическая функция. Тогда

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta).$$

При этом аналитическая функция $w(z)$ перейдёт в аналитическую функцию переменного ζ:

$$w^*(\zeta) \equiv w(\psi(\zeta)).$$

Следовательно, функции

$$\left.\begin{aligned} u^*(\xi, \eta) &= u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \\ v^*(\xi, \eta) &= v(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVII.9)}$$

будут снова гармоническими функциями переменных ξ, η.

Как доказывается в курсах теории функций комплексного переменного, формулы (XVII.9) осуществляют конформное отображение плоскости x, y на плоскость ξ, η, причём любое конформное отображение может быть получено таким образом. Из наших рассуждений следует вывод: гармоническая функция переменных x, y в некоторой области остаётся гармонической, если эту область подвергнуть конформному преобразованию.

Для любой односвязной области Ω плоскости x, y мы получаем следующий метод решения задачи Дирихле. Найдём конформное отображение

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta),$$

переводящее область Ω в круг. В теории функций комплексного переменного доказывается, что такое отображение существует. Функция $u^*(\xi, \eta)$ должна быть гармонической в круге функцией, принимающей на границе заданные значения. Такую функцию можно построить при помощи формулы Пуассона. Возвращаясь к переменным x, y, получим решение нашей задачи.

ЛЕКЦИЯ XVIII.

ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§ 1. Общие замечания.

Мы уже видели в прошлых лекциях, что решение некоторых задач математической физики приводится к решению уравнений

$$\varphi(P) = \int_D K(P, P_1)\,\varphi(P_1)\,dP_1 + f(P), \tag{XVIII.1}$$

где D — некоторая область изменения точки P и точки P_1. Функция $K(P, P_1)$ двух переменных точек из этой области называется ядром, а $\varphi(P)$ является неизвестной функцией.

Область D предполагается лежащей в n-мерном пространстве, и пусть координаты точки P в этом пространстве будут $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а точки P_1 будут $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$; тогда ядро $K(P, P_1)$ есть функция $2n$ переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1', x_2', \ldots x_n')$, а функции $\varphi(P)$ и $f(P)$ являются функциями n переменных: $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, причём эти переменные изменяются так, что точки $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $P_1(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ не выходят из области D.

В частности, если область D является одномерной и связной, тогда положение точки P определяется одной координатой x, и интегральное уравнение примет вид:

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, x')\,\varphi(x')\,dx' + f(x).$$

К систематическому изучению уравнений вида (XVIII.1), называемых обычно *интегральными уравнениями Фредгольма 2-го рода*, мы сейчас и приступим.

Функции K и f мы будем считать вещественными. Другие ограничения, как-то: ограниченность, непрерывность и тому подобное, мы будем вводить по мере надобности.

Мы будем встречаться далее с уравнениями, могущими иметь не одно, а несколько решений. При этом во всём дальнейшем мы не будем считать различными функции, которые являются эквивалентными, то-есть принимают различные значения на множестве меры нуль.

Так же, как и для всяких линейных уравнений, для интегральных уравнений типа Фредгольма имеет место

Теорема 1. *Общее решение уравнения* (XVIII.1) *имеет вид:*

$$\varphi(P)=\varphi_0(P)+\varphi^*(P),$$

где $\varphi_0(P)$ *есть некоторое частное решение уравнения* (XVIII.1), *а* $\varphi^*(P)$ *представляет собою общее решение уравнения*

$$\varphi(P)=\int_D K(P,\ P_1)\,\varphi(P_1)\,dP_1. \tag{XVIII.2}$$

Уравнение (XVIII.2) мы будем называть *соответствующим однородным уравнением* для уравнения (XVIII.1).

Отсюда ясно, что если соответствующее однородное уравнение не имеет других решений, кроме тривиального $\varphi^*(P)=0$, то наше уравнение не может иметь более одного решения.

§ 2. Метод последовательных приближений.

Прежде всего изучим несколько простейших частных случаев, которые позволят нам перейти к более общей трактовке вопроса.

Вместо уравнения (XVIII.1) мы будем рассматривать уравнение более общего вида:

$$\varphi(P)=\lambda\int_D K(P,\ P_1)\,\varphi(P_1)\,dP_1+f(P), \tag{XVIII.3}$$

так называемое уравнение с параметром. Допустим, что область D изменения точки P ограничена; объём этой области будем обозначать также буквой D. Допустим кроме того, что ядро $K(P,\ P_1)$ представляет собою суммируемую функцию переменной пары точек $(P,\ P_1)$ в пространстве $2n$ переменных, причём справедливо ещё неравенство

$$\int_D |K(P,\ P_1)|\,dP_1\leqslant M,$$

где постоянная M не зависит от положения точки P.

В тех приложениях, которыми мы будем заниматься, функция $K(P, P_1)$ будет иметь лишь конечное число таких многообразий меньшего числа измерений (точек, линий, поверхностей и т. д.), на которых она терпит разрыв. Если исключить эти многообразия вместе с окружающим их сколь угодно малым объёмом, то функция $K(P,\ P_1)$ будет непрерывна в оставшейся части области.

Допустим, что $f(P)$ представляет собой ограниченную измеримую функцию:

$$\sup|f(P)| = L < \infty.$$

Это условие будет выполнено, если, например, f ограничена в D и непрерывна всюду, за исключением, быть может, конечного числа многообразий низшей размерности. Функцию $\varphi(P)$ мы будем также считать ограниченной и измеримой.

При малых λ естественно возникает мысль искать решение уравнения (XVIII.3) в виде степенного ряда

$$\varphi(P) = \varphi_0(P) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(P). \tag{XVIII.4}$$

Подставляя это выражение в (XVIII.3), получим:

$$\varphi_0(P) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(P) =$$
$$= \lambda \int_D K(P, P_1)\left[\varphi_0(P_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(P_1)\right] dP_1 + f(P),$$

откуда, сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях справа и слева, получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_0(P) = f(P),\\
&\varphi_1(P) = \int_D K(P, P_1)\,\varphi_0(P_1)\,dP_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi_k(P) = \int_D K(P, P_1)\,\varphi_{k-1}(P_1)\,dP_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{XVIII.5}$$

Соотношения (XVIII.5) позволяют шаг за шагом вычислить все функции $\varphi_k(P)$. Действительно, все интегралы в правых частях (XVIII.5) имеют смысл, так как подинтегральные выражения представляют собой произведения ограниченных функций на функции суммируемые. Оценивая последовательно правые части этих уравнений, будем иметь

$$|\varphi_0(P)| \leqslant L; \quad |\varphi_1(P)| \leqslant \int_D |K(P, P_1)|\, L\, dP_1 \leqslant LM$$

и вообще

$$|\varphi_k(P)| \leqslant LM^k.$$

Измеримость функций $\varphi_k(P)$ следует из теоремы Лебега-Фубини.

Для краткости условимся обозначать функцию

$$\psi(P)=\int_D K(P,P_1)f(P_1)\,dP_1$$

символом Af.

Как мы убедились, справедливо неравенство

$$|Af|\leqslant M\sup|f|.$$

Будем называть Af оператором над функцией f. Введём в рассмотрение степени оператора A:

$$A(Af)=A^2f,\ A(A^2f)=A^3f,\ \ldots,\ A(A^{m-1}f)=A^mf.$$

Справедлива следующая очевидная формула:

$$A^{p+q}f=A^p(A^qf).$$

Формулы (XVIII.5) в этих обозначениях примут вид

$$\varphi_k(P)=A^kf. \qquad \text{(XVIII.6)}$$

При этом, как мы видели, имеет место оценка

$$|A^kf|\leqslant M^k\sup|f|. \qquad \text{(XVIII.7)}$$

Отметим одно важное свойство оператора A.

Теорема 2. *Если некоторая последовательность ограниченных измеримых функций f_k равномерно сходится к предельной функции f_0, т. е.*

$$f_0=\lim_{k\to\infty}f_k,$$

то

$$Af_0=\lim_{k\to\infty}Af_k,$$

причём последовательность Af_k также сходится равномерно.

В самом деле,

$$|Af_k-Af_0|=|A(f_k-f_0)|\leqslant M\sup|f_k-f_0|.$$

Следствие. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(P)=u(P)$$

сходится равномерно, то

$$Au(P)=\sum_{k=1}^{\infty}Au_k(P).$$

В наших новых обозначениях уравнение (XVIII.3) примет вид

$$\varphi-\lambda A\varphi=f.$$

или, полагая ещё $E\varphi \equiv \varphi$, где E — тождественный или единичный оператор, запишем его в виде

$$(E-\lambda A)\varphi = f.$$

Подставляя в (XVIII.4) выражение для φ_k из (XVIII.6), мы получим, пока ещё формально, равенство

$$\varphi(P) = f + \lambda Af + \lambda^2 A^2 f + \ldots + \lambda^k A^k f + \ldots \qquad \text{(XVIII.8)}$$

Члены ряда в правой части (XVIII.8), как это вытекает из оценок (XVIII.7), при $|\lambda M| < 1$ будут по абсолютной величине меньше членов сходящегося числового ряда с положительными членами:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k M^k \sup |f| = \sup |f| \frac{1}{1-|\lambda| M}.$$

Следовательно, при фиксированном λ, удовлетворяющем условию $|\lambda| < \frac{1}{M}$, ряд в (XVIII.8) сходится равномерно, и формула (XVIII.8) в самом деле определяет некоторую измеримую функцию $\varphi(P)$. При этом

$$|\varphi| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k M^k \sup |f| = \frac{\sup |f|}{1-|\lambda| M}.$$

Проверим теперь, что полученная нами функция $\varphi(P)$ является решением уравнения (XVIII.3). Подставляя выражение для φ из (XVIII.8) в левую часть уравнения (XVIII.3), получим:

$$(E-\lambda A)\left[f + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A^k f\right].$$

Если мы покажем, что это выражение тождественно равно f, наше утверждение будет доказано. Ряд, стоящий в квадратных скобках, сходится равномерно. На основании теоремы 2 имеем:

$$(E-\lambda A)\left[f + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A^k f\right] =$$
$$= f + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A^k f - \lambda Af - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k+1} A^{k+1} f = f. \qquad \text{(XVIII.9)}$$

Таким образом, мы доказали, что функция $\varphi(P)$, выражаемая формулой (XVIII.8), есть решение интегрального уравнения (XVIII.3). Легко доказать единственность ограниченного решения при условии $|\lambda| M < 1$. Для этого, предполагая интегральное уравнение (XVIII.3) выполненным, применим к обеим частям этого уравнения оператор

$$E+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k A^k,$$

понимаемый в следующем смысле:

$$\left(E+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k A^k\right)f=f+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k A^k f.$$

Мы получим:

$$\left(E+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k A^k\right)[(E-\lambda A)\varphi]=\left(E+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k A^k\right)f.$$

Раскрывая скобки в левой части, получим:

$$\left(E+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k A^k\right)[(E-\lambda A)\varphi]=$$
$$=\varphi+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k A^k\varphi-\lambda A\varphi-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k+1}A^{k+1}\varphi=\varphi. \quad \text{(XVIII.10)}$$

Отсюда

$$\varphi=\left(E+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k A^k\right)f.$$

Следовательно, решение должно выражаться формулой (XVIII.8) и является единственным. Если ввести обозначение

$$B=E-\lambda A,$$

то оператор

$$E+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k A^k$$

естественно обозначить символом B^{-1}. При этом равенства (XVIII.9) и (XVIII.10) примут вид

$$BB^{-1}f=f, \quad \text{(XVIII.11)}$$
$$B^{-1}Bf=f. \quad \text{(XVIII.12)}$$

Эти формулы оправдывают нашу символику.

§ 3. Уравнение Вольтерра.

В некоторых частных случаях ряд (XVIII. 8) может оказаться сходящимся на всей плоскости комплексного переменного λ. Рассмотрим соответствующий пример. Пусть область D одного переменного представляет собой полупрямую $x>0$,

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^{\infty}K(x, y)\varphi(y)\,dy+f(x),$$

и пусть ядро $K(x, y)$ обладает свойством:

$$K(x, y) \equiv 0 \text{ при } y > x,$$

и ограничено

$$|K(x, y)| \leqslant M.$$

Тогда уравнение примет вид

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x K(x, y) \varphi(y) \, dy + f(x).$$

Уравнения этого типа называются *уравнениями Вольтерра.*

Предполагая попрежнему, что функция f ограничена постоянной L и измерима, оценим величину $A^k f$. Мы имеем:

$$|Af| = \left| \int_0^x K(x, y) f(y) \, dy \right| \leqslant \int_0^x LM \, dy = L \frac{Mx}{1},$$

$$|A^2 f| = \left| \int_0^x K(x, y) (Af) \, dy \right| \leqslant \int_0^x ML \frac{My}{1} \, dy = L \frac{M^2 x^2}{1 \cdot 2},$$

$$|A^3 f| = \left| \int_0^x K(x, y) (A^2 f) \, dy \right| \leqslant \int_0^x ML \frac{M^2 y^2}{1 \cdot 2} \, dy = L \frac{M^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

. . . .

$$|A^k f| \leqslant L \frac{M^k x^k}{k!}.$$

Следовательно, все члены ряда (XVIII.8)

$$f + \lambda A f + \lambda^2 A^2 f + \ldots + \lambda^k A^k f + \ldots$$

по абсолютной величине не превосходят соответствующих членов ряда

$$L + L \frac{\lambda M x}{1!} + L \frac{\lambda^2 M^2 x^2}{2!} + \ldots + L \frac{\lambda^k M^k x^k}{k!} + \ldots,$$

сходящегося на всей плоскости λ. Отсюда следует, что ряд (XVIII. 8) равномерно сходится в каждом конечном круге и представляет собой целую аналитическую функцию λ.

§ 4. Уравнения с вырожденным ядром.

Рассмотрим ещё один частный класс интегральных уравнений, теорию которого легко построить. Полученные при этом результаты окажутся справедливыми и в болеее общем случае.

Изучим интегральное уравнение (XVIII.3) в предположении, что его ядро имеет специальный вид:

$$K(P, P_1) = \sum_{l=1}^{N} \varphi_l(P) \psi_l(P_1). \tag{XVIII.13}$$

Ядра вида (XVIII. 13) называются *вырожденными*.

В соответствии с тем, что было сказано выше, условимся говорить, что система функций $\varphi_1(P)$, $\varphi_2(P)$, ..., $\varphi_N(P)$ линейно независима, если не существует таких постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$, не равных одновременно нулю, для которых линейная комбинация

$$\alpha_1\varphi_1(P) + \alpha_2\varphi_2(P) + \ldots + \alpha_N\varphi_N(P)$$

эквивалентна нулю. Систему функций $\varphi_1(P)$, $\varphi_2(P)$, ..., $\varphi_N(P)$, а также систему $\psi_1(P)$, $\psi_2(P)$, ..., $\psi_N(P)$ мы можем считать линейно независимыми системами в области D, ибо в противном случае можно выразить одну или несколько функций через линейную комбинацию остальных, и мы придём к ядру такого же вида, но с меньшим числом слагаемых.

В дальнейшем, пока не сделано специальной оговорки, мы будем считать функции

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_N, \psi_1, \ldots, \psi_N$$

ограниченными и имеющими лишь изолированные разрывы на конечном числе гладких поверхностей.

Уравнение (XVIII. 3) с вырожденным ядром имеет вид:

$$\varphi(P) = \lambda \sum_{l=1}^{N} \varphi_l(P) \int_D \psi_l(P_1)\varphi(P_1)\,dP_1 + f(P), \tag{XVIII.14}$$

и, следовательно, разность $\varphi(P) - f(P)$ должна быть линейной комбинацией функций $\varphi_l(P)$, $l = 1, 2, \ldots, N$ с постоянными коэффициентами. Полагая $\varphi(P) - f(P) = \lambda \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\varphi_k(P)$ и подставляя это выражение в уравнение (XVIII. 14), получим:

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k\varphi_k(P) = \lambda \sum_{l=1}^{N} \varphi_l(P) \int_D \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\varphi_k(P_1)\psi_l(P_1)\,dP_1 + \\ + \sum_{l=1}^{N} \varphi_l(P) \int_D \psi_l(P_1) f(P_1)\,dP_1.$$

Так как функции $\varphi_l(P)$ линейно независимы, то коэффициенты при одинаковых функциях должны быть одинаковыми в обеих частях уравнения, и мы получим систему уравнений

$$\alpha_l - \lambda \sum_{k=1}^{N} \alpha_k m_{kl} = f_l \quad (l = 1, 2, \ldots, N), \tag{XVIII. 15}$$

где

$$\left. \begin{aligned} m_{kl} &= \int_D \varphi_k(P_1) \psi_l(P_1)\, dP_1, \\ f_l &= \int_D f(P_1) \psi_l(P_1)\, dP_1. \end{aligned} \right\} \tag{XVIII. 16}$$

Система (XVIII. 15) равносильна интегральному уравнению (XVIII. 14) Обозначим матрицу системы (XVIII. 15) через $M(\lambda)$:

$$M(\lambda) = \begin{Vmatrix} 1 - m_{11}\lambda, & -m_{12}\lambda & \ldots & -m_{1N}\lambda \\ -m_{21}\lambda, & 1 - m_{22}\lambda & \ldots & -m_{2N}\lambda \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -m_{N1}\lambda, & -m_{N2}\lambda & \ldots & 1 - m_{NN}\lambda \end{Vmatrix}. \tag{XVIII.17}$$

Разрешимость нашей системы зависит от определителя $\Delta(\lambda) = |M(\lambda)|$ этой матрицы.

Очевидно, при этом могут представиться два случая:

I. $\Delta(\lambda) \neq 0$,

II. $\Delta(\lambda) = 0$.

В случае I имеем следующую теорему:

Теорема 3. *Система* (XVIII. 15) *при значениях* λ, *для которых* $\Delta(\lambda) \neq 0$, *однозначно разрешима при любых* f_l, *и уравнение* (XVIII. 14) *разрешимо при любой функции* f.

В частности, уравнение

$$\varphi(P) = \lambda \int_D K(P, P_1) \varphi(P_1)\, dP_1, \tag{XVIII. 18}$$

которое мы назвали соответствующим однородным уравнением для (XVIII.3), имеет при этом единственное тривиальное решение. Теорема 3 не требует доказательства.

В случае II при значениях, для которых $\Delta(\lambda) = 0$, система (XVIII.15) разрешима не при всяких f_l, а следовательно, уравнение (XVIII.3) — не при всяких f.

При этом однородная система

$$\alpha_l - \lambda \sum_{k=1}^{N} m_{kl} \alpha_k = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, N) \tag{XVIII.19}$$

имеет $N-q$ линейно независимых решений, где q — ранг матрицы $M(\lambda)$.

Пусть эти решения будут

$$\alpha_1^{(s)},\ \alpha_2^{(s)},\ \ldots,\ \alpha_N^{(s)} \quad (s=1, 2, \ldots, N-q).$$

Уравнение (XVIII.18) будет, очевидно, также иметь ровно $N-q$ линейно независимых решений.

Известно, что в том случае, когда определитель системы равен нулю, неоднородная система может не иметь ни одного решения. Мы напомним некоторое необходимое и достаточное условие для разрешимости системы (XVIII.15).

В силу условия $\Delta(\lambda)=0$ левые части (XVIII.15) зависимы и, следовательно, можно составить линейные комбинации этих левых частей, обращающиеся в нуль тождественно. В самом деле, умножая уравнения (XVIII.15) соответственно на β_l и складывая, получим:

$$\sum_{l=1}^{N}\alpha_l\beta_l-\lambda\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}m_{kl}\alpha_k\beta_l=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\beta_k-\lambda\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}m_{kl}\alpha_k\beta_l=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\left[\beta_k-\lambda\sum_{l=1}^{N}m_{kl}\beta_l\right]=\sum_{l=1}^{N}f_l\beta_l.$$

Можно подобрать β_l так, что

$$\beta_k-\lambda\sum_{l=1}^{N}m_{kl}\beta_l=0 \quad (k=1, 2, \ldots, N). \qquad \text{(XVIII.20)}$$

Это следует из того, что определитель системы (XVIII.20) равен $\Delta(\lambda)=0$. Как доказывается в курсах алгебры, число линейно независимых решений (XVIII.20) равно опять $N-q$. Пусть эти решения будут: $\beta_1^{(s)}, \beta_2^{(s)}, \ldots, \beta_N^{(s)}$; $s=1, 2, \ldots, (N-q)$.

Для разрешимости (XVIII.15) необходимо выполнение равенства

$$\sum_{l=1}^{N}f_l\beta_l^{(s)}=0 \quad (s=1, 2, \ldots, N-q). \qquad \text{(XVIII.21)}$$

В курсах алгебры доказывается, что эти условия являются также и достаточными. Подобно тому как система (XVIII.15) соответствовала уравнению (XVIII.3), а система (XVIII.19) — уравнению (XVIII.18), можно установить соответствие между системой (XVIII.20) и уравнением

$$\psi(P_1)=\lambda\int\limits_D K(P, P_1)\,\psi(P)\,dP, \qquad \text{(XVIII.22)}$$

которое мы будем называть однородным уравнением, союзным с уравнением (XVIII.18). Подставляя вместо $K(P, P_1)$ его выражение и повторяя дословно предыдущие рассуждения, мы убеждаемся, что решение уравнения (XVIII.22) должно иметь вид:

$$\psi^{(s)}(P_1) = \sum_{l=1}^{N} \beta_l^{(s)} \psi_l(P_1), \tag{XVIII.23}$$

где $\beta_l^{(s)}$ — числа, удовлетворяющие (XVIII.20). Отсюда получаем теорему.

Теорема 4. *Однородное уравнение* (XVIII.18) *и союзное с ним уравнение* (XVIII.22) *имеют одинаковое число решений, линейно независимых между собой. Это число равняется $r = N - q$, где q — ранг матрицы $M(\lambda)$, а N — число слагаемых в нашем вырожденном ядре.*

Подчеркнём, что однородные уравнения (XVIII.18) и (XVIII.22) имеют нетривиальные решения только для тех значений λ, для которых детерминант матрицы $M(\lambda)$ обращается в нуль. Эти значения λ называются *собственными значениями или характеристическими числами* нашего уравнения, а число линейно независимых решений $r = N - q$, соответствующее данному характеристическому числу, называется его рангом.

Подставим в уравнения (XVIII.21) вместо f_l их выражения. Мы будем иметь:

$$\int_D f(P) \sum_{l=1}^{N} \beta_l^{(s)} \psi_l(P)\, dP = 0, \tag{XVIII.24}$$

или

$$\int_D f(P)\, \psi^{(s)}(P)\, dP = 0. \tag{XVIII.25}$$

Очевидно, что (XVIII.21) и (XVIII.25) равносильны.

Будем называть две функции *ортогональными, если интеграл от их произведения по области D равен нулю.* Докажем следующую теорему.

Теорема 5. *Необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения* (XVIII.14) *в случае* II, *т. е. при* $\Delta(\lambda) = 0$, *является ортогональность его свободного члена f ко всем решениям союзного однородного уравнения.*

Очевидно, что при этом общее решение уравнения (XVIII.14) имеет вид

$$\varphi(P) = \varphi^{(0)}(P) + \sum_{s=1}^{N-q} C_s \varphi^{(s)}(P), \tag{XVIII.26}$$

где $\varphi^{(0)}(P)$ — некоторое частное решение, а $\varphi^{(s)}(P)$; $s = 1, 2, \ldots, (N-q)$ суть частные решения однородного уравнения (XVIII.18). Теоремы 3, 4 и 5 носят название первой, второй и третьей *теорем Фредгольма.*

Замечание. Первая теорема Фредгольма по существу следует из второй и третьей. В самом деле, если число линейно независимых решений у союзного уравнения и у соответствующего однородного уравнения равно нулю (решений у этих уравнений всегда одинаковое число), то условия ортогональности пропадают, и неоднородное уравнение будет однозначно разрешимо.

До сих пор мы рассматривали уравнения с вырожденным ядром, предполагая, что функции $\varphi_l(P)$ и $\psi_l(P)$ не содержат параметра λ.

Пусть теперь функции $\varphi_l(P)$ и $\psi_l(P)$ зависят ещё от комплексного параметра λ и аналитичны в некоторой области Ω изменения этого переменного.

Тогда определитель $\Delta(\lambda)$ будет функцией от λ, также аналитической в этой области. Допустим, что он не обращается в нуль тождественно. *Тогда внутри Ω второй случай (т. е. $\Delta(\lambda)=0$) может иметь место только в изолированных точках*, ибо $\Delta(\lambda)$, как функция аналитическая, может иметь только изолированные нули.

Полученный результат можно сформулировать в виде теоремы.

4-я теорема Фредгольма. Если в уравнении с вырожденным ядром функции, из которых составлено это ядро, суть аналитические функции параметра λ в некоторой области Ω в плоскости λ и если хотя бы для одного значения λ уравнение однозначно разрешимо при любой правой части, то второй случай (т. е. $\Delta(\lambda)=0$) может иметь место только для изолированных точек области Ω.

§ 5. Ядро специального вида. Теоремы Фредгольма для общего случая.

Разобрав решение интегральных уравнений в круге $|\lambda|<\frac{1}{M}$, а также уравнений с вырожденным ядром, переходим к анализу более общего случая. Пусть ядро уравнения (XVIII.3) имеет вид

$$K(P, P_1)=\sum_{l=1}^{N}\chi_l(P)\,\xi_l(P_1)+K_1(P, P_1), \qquad \text{(XVIII.27)}$$

где

$$\int_D |K_1(P, P_1)|\,dP_1 \leqslant M, \qquad \text{(XVIII.28)}$$

$$\int_D |K_1(P, P_1)|\,dP \leqslant M. \qquad \text{(XVIII.29)}$$

Уравнение (XVIII.3) примет при этом вид

$$\varphi(P)-\lambda\int_D K_1(P, P_1)\,\varphi(P_1)\,dP_1=$$

$$=\lambda\sum_{l=1}^{N}\chi_l(P)\int_D \xi_l(P_1)\,\varphi(P_1)\,dP_1+f(P). \qquad \text{(XVIII.30)}$$

Будем рассматривать уравнение (XVIII.27) при значениях λ, удовлетворяющих условию $|\lambda| < \frac{1}{M}$. Введём опять символические обозначения

$$\varphi(P) - \lambda \int\limits_D K_1(P, P_1)\varphi(P_1)\,dP_1 \equiv (E - \lambda A)\varphi \equiv B_1\varphi,$$

$$\chi(P) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A^k \chi \equiv B_1^{-1}\chi.$$

Воспользуемся также соответствующими обозначениями для союзного уравнения

$$\psi(P_1) - \lambda \int\limits_D K_1(P, P_1)\psi(P)\,dP \equiv (E - \lambda A^*)\psi = B_1^*\psi.$$

Легко проверить, что если положить

$$B_1^{*-1}\xi(P_1) \equiv \xi(P_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A^{*k}\xi(P_1),$$

то аналогично (XVIII.11) и (XVIII.12) получим:

$$B_1^* B_1^{*-1}\xi(P_1) \equiv \xi(P_1), \quad B_1^{*-1} B_1^*\xi(P_1) \equiv \xi(P_1).$$

Проверим ещё две формулы, которыми мы будем пользоваться далее:

$$\int\limits_D [B_1\varphi(P)]\,\psi(P)\,dP = \int\limits_D \varphi(P)\,[B_1^*\psi(P)]\,dP_1, \qquad \text{(XVIII.31)}$$

$$\int\limits_D [B_1^{-1}\chi(P)]\,\xi(P)\,dP = \int\limits_D \chi(P)\,[B_1^{*-1}\xi(P)]\,dP. \qquad \text{(XVIII.32)}$$

В самом деле,

$$\int\limits_D \psi(P)\,[A\varphi(P)]\,dP = \int\limits_D \psi(P)\left[\int\limits_D K(P, P_1)\,\varphi(P_1)\,dP_1\right]dP =$$

$$= \int\limits_D \varphi(P_1)\left[\int\limits_D K(P, P_1)\,\psi(P)\,dP\right]dP_1 = \int\limits_D \varphi(P_1)\,[A^*\psi(P_1)]\,dP_1.$$

Отсюда непосредственно получаем:

$$\int\limits_D \psi(P)\,\{[E - \lambda A]\,\varphi\}\,dP = \int\limits_D \varphi(P)\,\{[E - \lambda A^*]\,\psi\}\,dP.$$

Так же доказывается и формула (XVIII.32).

Уравнение (XVIII.30) запишется при этом в виде:

$$B_1\varphi = \lambda \sum \chi_i(P) \int\limits_V \xi_i(P_1)\,\varphi(P_1)\,dP_1 + f(P). \qquad \text{(XVIII.33)}$$

Введём новую неизвестную функцию, полагая $B_1\varphi(P)=\chi(P)$, откуда $\varphi(P)=B_1^{-1}\chi(P)$. Подставляя в уравнение (XVIII.30) это выражение и пользуясь равенством (XVIII.32), получим:

$$\chi(P)=\lambda\sum\chi_l(P)\int_D \xi_l(P_1)B_1^{-1}\chi(P_1)\,dP_1+f(P)=$$

$$=\lambda\sum\chi_l(P)\int_D B_1^{*-1}\xi_l(P_1)\chi(P_1)\,dP_1+f(P). \qquad \text{(XVIII.34)}$$

Таким образом, уравнение (XVIII.30) перешло в уравнение с вырожденным ядром для новой неизвестной функции $\chi(P)$ с тем же свободным членом. Обратно, если $\chi(P)$ есть решение уравнения (XVIII.34), то функция $\varphi(P)=B_1^{-1}\chi(P)$ будет решением уравнения (XVIII.30). Для того чтобы убедиться в этом, достаточно подставить в (XVIII.34) вместо $\chi(P)$ его выражение: $\chi(P)=B_1\varphi(P)$.

Покажем, что из теорем Фредгольма, справедливых по доказанному для нового интегрального уравнения относительно $\chi(P)$, вытекает справедливость этих же теорем для первоначального уравнения при $|\lambda|<\frac{1}{M}$.

Составим союзное однородное уравнение для уравнения (XVIII.34)

$$\psi(P_1)-\lambda\sum B_1^{*-1}\xi_l(P_1)\int_D \chi_l(P)\psi(P)\,dP=0. \qquad \text{(XVIII.35)}$$

Обозначим левую часть этого уравнения через $\omega(P_1)$. Функция $\omega(P_1)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда

$$B_1^*\omega(P_1)=0. \qquad \text{(XVIII.36)}$$

Это значит, что уравнение (XVIII.35) имеет все те же решения, что и уравнение (XVIII.36). Но

$$B_1^*\omega_1(P_1)=B_1^*\psi(P_1)-\lambda\Big(\sum\int_D \chi_l(P)\,\psi(P)\,dP\Big)B_1^*B_1^{*-1}\xi_l(P_1)=$$

$$=B_1^*\psi(P_1)-\lambda\sum\xi_l(P_1)\int_D \chi_l(P)\psi(P)\,dP,$$

и, следовательно, уравнение (XVIII.36) есть союзное однородное уравнение для (XVIII.30). Таким образом, союзное однородное уравнение для (XVIII.34) и союзное однородное уравнение для (XVIII.30) равносильны.

Пользуясь развитой нами теорией, мы можем установить все теоремы Фредгольма для исходного уравнения.

2-я теорема Фредгольма. *Число q линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения для уравнения* (XVIII.30) *и союзного с ним* (XVIII.36) *совпадает.*

Достаточно установить совпадение числа линейно независимых решений у однородного уравнения, соответствующего уравнениям (XVIII.34) и (XVIII.36), эквивалентных рассматриваемым. Но число таких решений однородного уравнения, соответствующего (XVIII.34) и (XVIII.35), одинаково в силу 2-й теоремы Фредгольма, доказанной нами для уравнения с вырожденным ядром. Теорема доказана.

3-я теорема Фредгольма. *Необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения* (XVIII.30) *состоит в том, чтобы свободный член его был ортогонален ко всем решениям союзного однородного уравнения* (XVIII.36):

$$\int\limits_D f(P)\,\psi_i(P)\,dP = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ q). \qquad \text{(XVIII.37)}$$

Заметим, что решения $\psi_i(P)$ уравнения (XVIII.36) суть решения уравнения (XVIII.35), а свободный член (XVIII.30) и (XVIII.34) один и тот же.

Поэтому условия (XVIII.37) выражают собою, как следует из 3-й теоремы Фредгольма, установленной для уравнений с вырожденным ядром, необходимые и достаточные условия разрешимости (XVIII.34).

Благодаря тому, что уравнения (XVIII.34) и (XVIII.30) разрешимы одновременно, условия (XVIII.37) будут необходимыми и достаточными условиями разрешимости (XVIII.30). Теорема доказана.

1-я теорема Фредгольма. *Если уравнение* (XVIII.30) *разрешимо при любой функции* $f(P)$ *в правой части, то решение его единственно, и значит, соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение. Наоборот, если однородное уравнение имеет только тривиальное решение, то уравнение разрешимо при любой функции* $f(P)$.

Эта теорема, как отмечено выше, есть следствие 2-й и 3-й теорем Фредгольма.

В нашем случае 4-я теорема Фредгольма имеет особенно простую формулировку.

4-я теорема Фредгольма. *Характеристические значения* λ *не имеют предельных точек внутри круга* $|\lambda| < \frac{1}{M}$.

Доказательство вытекает из того, что $\lambda = 0$ не будет характеристическим числом для (XVIII.30), так как иных решений, кроме $\chi(P) = f(P)$, при этом значении λ не будет.

В силу 4-й теоремы Фредгольма для вырожденных ядер, характеристические числа уравнения (XVIII.34), а значит, и уравнения (XVIII.30) не могут иметь предельных точек внутри круга $|\lambda| < \frac{1}{M}$, где регулярны функции, из которых составлено ядро. Теорема доказана.

Мы доказали четыре теоремы Фредгольма для тех интегральных уравнений, ядро которых представимо в виде (XVIII.27). В приложениях часто встречаются ядра такого типа, что они допускают апроксимацию суммами вида

$$\sum_{l=1}^{N} \chi_l(P)\, \xi_l(P_1)$$

с любой степенью точности в том смысле, что число M, равное верхней грани интегралов

$$\int\limits_D |K(P, P_1)|\, dP_1, \quad \int\limits_D |K(P, P_1)\, dP,$$

может быть как угодно мало.

Для ядер такого типа все теоремы Фредгольма справедливы в круге сколь угодно большого радиуса, и единственной предельной точкой для характеристических значений λ может служить ∞.

Докажем, что это обстоятельство будет иметь место, например, если выполнены следующие условия, очень часто встречающиеся в приложениях:

1) Область D представляет собой некоторое n-мерное многообразие в некотором k-мерном кубе $\Omega_1: 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1, \ldots$ $\ldots, 0 \leqslant x_k \leqslant 1$ (или может быть взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображена на такое многообразие).

2) Ядро $K(P, P_1)$ есть функция, непрерывная в $2n$-мерном многообразии, и может быть непрерывно продолжена на $2k$-мерный куб Ω_2:

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1 \ (i = 1,\ 2,\ \ldots, k),$$
$$0 \leqslant y_i \leqslant 1 \ (i = 1,\ 2,\ \ldots, k),$$

где через x_i обозначены координаты точки P в кубе Ω_1, а через y_i — координаты точки Q в том же кубе.

Очевидно, что оба эти условия будут выполнены, например, если область D есть поверхность в трёхмерном пространстве и функция $K(P, P_1)$ непрерывна при изменении P и P_1 вдоль этой поверхности.

Переходим к доказательству нашего утверждения.

Согласно известной теореме Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами, функцию $K(P, P_1)$, непрерывную в замкнутом $2k$-мерном кубе, всегда можно представить приближённо с помощью многочленов от $2k$ переменных с любой наперёд заданной точностью. Но многочлен от x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, и y_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, всегда может быть представлен в виде суммы произведений функций, зависящих только от $x_1, \ldots, x_k$, на функции, зависящие только от $y_1, \ldots, y_k$, что и требовалось доказать.

Из самого построения решения уравнения Фредгольма в нашем случае очевидно, что это решение будет аналитической функцией параметра λ на всей плоскости, за исключением особых точек, являющихся характеристическими значениями λ и лежащих изолированно,

§ 6. Обобщение результатов.

Для того чтобы получить результаты, изложенные в § 5 настоящей лекции, нет надобности требовать, чтобы ядро $K_1(P, P_1)$ удовлетворяло обоим условиям (XVIII.28) и (XVIII.29). Достаточно допустить, что выполнено одно из них, например первое. Мы предположим, что выполнено условие (XVIII.28) и не будем делать никаких предположений относительно интеграла

$$\int_D |K_1(P, P_1)|\, dP.$$

Положим

$$\chi(P_1) = A^*\psi \equiv \int_D K_1(P, P_1)\,\psi(P)\, dP.$$

Докажем следующее основное свойство оператора A^*: если функция $\psi(P)$ суммируема, то и функция $\chi(P_1)$ суммируема, и при этом

$$\int_D |\chi(P_1)|\, dP_1 \leqslant M \int_D |\psi(P)|\, dP. \qquad \text{(XVIII.38)}$$

Для доказательства рассмотрим функцию $2n$ переменных

$$K_1(P, P_1)\,\psi(P).$$

Эта функция измерима как произведение двух измеримых функций. Кроме того, она суммируема как функция $2n$ переменных. В самом деле, справедливо очевидное неравенство

$$\int_D |\psi(P)| \left\{\int_D |K_1(P, P_1)|\, dP_1\right\} dP \leqslant M \int_D |\psi(P)|\, dP.$$

Повторный интеграл в левой части, очевидно, существует. На основании добавления к теореме Фубини (лекция VI, § 7, стр. 124) существует двойной интеграл

$$\int_D \int_D |\psi(P) K(P, P_1)|\, dP\, dP_1$$

и, следовательно, существует также двойной интеграл

$$\int_D \int_D \psi(P) K_1(P, P_1)\, dP\, dP_1,$$

причём возможно изменение порядка интегрирования. Это означает, что имеют смысл обе части неравенства

$$\int_D \left|\left\{\int_D K_1(P, P_1)\psi(P)\, dP\right\}\right| dP_1 \leqslant \int_D \left\{\int_D |K_1(P, P_1)\psi(P)|\, dP\right\} dP_1,$$

и неравенство справедливо. Но

$$\int\limits_D \left\{ \int\limits_D |K_1(P, P_1)\psi(P)|\,dP \right\} dP_1 = \int\limits_D |\psi(P)| \left\{ \int\limits_D |K_1(P, P_1)|\,dP_1 \right\} dP,$$

что вместе с (XVIII.28) непосредственно даёт (XVIII.38).

Теорема 6. *Если последовательность ψ_k сходится в среднем к функции ψ_0, т. е. стремится к нулю интеграл*

$$\int\limits_D |\psi_0 - \psi_k|\,dP,$$

то последовательность $A^*\psi_k$ сходится в среднем к $A^*\psi_0$. В самом деле,

$$\int\limits_D |A^*\psi_0 - A^*\psi_k|\,dP = \int\limits_D |A^*(\psi_0 - \psi_k)|\,dP \leqslant M \int\limits_D |\psi_0 - \psi_k|\,dP,$$

откуда и следует наше утверждение.

В частности, если ряд $v = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится в среднем, то

$$A^*v = \sum_{k=1}^{\infty} A^*u_k,$$

где ряд справа сходится в среднем.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$B^*\psi \equiv (E - \lambda A^*)\psi = \chi, \tag{XVIII.39}$$

союзное для уравнения (XVIII.3). Подобно тому как было найдено решение уравнения (XVIII.3), мы можем получить решение этого уравнения в виде ряда

$$\psi \equiv B^{*-1}\chi = \chi + \lambda A^*\chi + \lambda^2 A^{*2}\chi + \ldots + \lambda^k A^{*k}\chi + \ldots \tag{XVIII.40}$$

Докажем, что формула (XVIII.40) действительно даёт решение уравнения (XVIII.39) в круге

$$|\lambda| < \frac{1}{M}.$$

Установим, прежде всего, сходимость ряда в правой части (XVIII.40). Применяя последовательно неравенство (XVIII.38), получим:

$$\int\limits_D |A^*\chi|\,dP \leqslant M \int\limits_D |\chi|\,dP, \quad \int\limits_D |A^{*2}\chi|\,dP \leqslant M^2 \int\limits_D |\chi|\,dP, \ldots,$$

$$\int\limits_D |A^{*k}\chi|\,dP \leqslant M^k \int\limits_D |\chi|\,dP, \ldots$$

Из полученных оценок непосредственно следует неравенство

$$\int_D \Big|\sum_{k=m}^{m+p} \lambda^k A^{*k}\chi\Big| \, dP \leqslant \int_D \Big\{\sum_{k=m}^{m+p} |\lambda^k A^{*k}\chi|\Big\} dP =$$
$$= \sum_{k=m}^{m+p} |\lambda|^k \int_D |A^{*k}\chi| \, dP \leqslant \Big(\sum_{k=m}^{m+p} |\lambda|^k M^k\Big) \int_D |\chi| \, dP.$$

В круге $|\lambda| < \frac{1}{M}$ имеем:

$$\int_D \Big|\sum_{k=m}^{m+p} \lambda^k A^{*k}\chi\Big| \, dP \leqslant \frac{|\lambda|^m M^m}{1-|\lambda| M} \int_D |\chi| \, dP.$$

При достаточно большом m правая часть неравенства будет меньше любого наперёд заданного числа. Следовательно, на основании теоремы о сходимости в среднем (лекция VI, теорема 23) ряд (XVIII.40) сходится в среднем, и сумма его, обозначенная символом $B^{*-1}\chi$, представляет собой суммируемую функцию переменной точки P_1.

Докажем теперь тождества

$$B^* B^{*-1}\chi = \chi, \tag{XVIII.41}$$
$$B^{*-1} B^* \psi = \psi. \tag{XVIII.42}$$

Мы имеем:

$$B^{*-1}B\psi = (\psi - \lambda A^*\psi) + \lambda A^*(\psi - \lambda A^*\psi) + \lambda^2 A^{*2}(\psi - \lambda A^*\psi) + \ldots +$$
$$+ \lambda^k A^{*k}(\psi - \lambda A^*\psi) + \ldots = \psi.$$

Далее, пользуясь теоремой 6 и сходимостью в среднем ряда

$$\chi + \lambda A^*\chi + \lambda^2 A^{*2}\chi + \ldots + \lambda^k A^{*k}\chi + \ldots,$$

получим

$$(E - \lambda A^*)(\chi + \lambda A^*\chi + \lambda^2 A^{*2}\chi + \ldots + \lambda^k A^{*k}\chi + \ldots) = \chi,$$

откуда $B^* B^{*-1}\chi \equiv \chi$. Последнее тождество выражает тот факт, что функция $B^{*-1}\chi$ является решением уравнения (XVIII.39). Тождество (XVIII.42) показывает, что $B^{*-1}\chi$ есть единственное решение, так как из уравнения (XVIII.39), применяя к обеим частям оператор B^{*-1}, получим $\psi = B^{*-1}\chi$.

Все остальные рассуждения для уравнений, ядра которых удовлетворяют лишь условию (XVIII.28), дословно совпадают с доказательствами из § 5.

§ 7. Уравнения с неограниченными ядрами специального вида.

Рассмотрим ядро $K(P, P_1)$, где точки P, P_1 принадлежат ограниченной области D. Обозначим через r расстояние между точками P и P_1. Предположим, что ядро $K(P, P_1)$ непрерывно всюду по совокупности переменных точек P, P_1 при $r \neq 0$, а при $r \to 0$ стремится к бесконечности, удовлетворяя во всей области D неравенству

$$|K(P, P_1)| < \frac{A}{r^\alpha},$$

где $0 < \alpha < n$.

Покажем, что для ядер такого типа все наши условия выполнены и что ядро $K(P, P_1)$ в этом случае представимо в виде (XVIII.27) при сколь угодно малой постоянной M в неравенстве (XVIII.28).

Рассмотрим функцию

$$K^*(P, P_1) = \min\left[K(P, P_1), \frac{A}{\delta^\alpha}\right],$$

где δ — заданное положительное число.

Оценим интеграл

$$\int_D |K(P, P_1) - K^*(P, P_1)|\, dP_1.$$

Разность $K(P, P_1) - K^*(P, P_1)$ может быть отлична от нуля лишь в области $r < \delta$, ибо во всех остальных точках $K(P, P_1) \leqslant \frac{A}{\delta^\alpha}$ и, значит, $K^*(P, P_1) = K(P, P_1)$. Функция $K(P, P_1) - K^*(P, P_1)$ всюду неотрицательна и при $r \leqslant \delta$ удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant K(P, P_1) - K^*(P, P_1) \leqslant A\left(\frac{1}{r^\alpha} - \frac{1}{\delta^\alpha}\right).$$

Отсюда получаем:

$$\int_D |K(P', P_1) - K^*(P, P_1)|\, dP_1 = \int_D [K(P, P_1) - K^*(P, P_1)]\, dP_1 \leqslant$$
$$\leqslant A \int_{r \leqslant \delta} \frac{1}{r^\alpha}\, dP_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

если только δ достаточно мало, при произвольном положительном числе ε.

Функция $K^*(P, P_1)$ как минимум двух непрерывных функций непрерывна при $r \neq 0$. В окрестности поверхности $r = 0$ она постоянна, равняясь $\frac{A}{\delta^\alpha}$, и, следовательно, также непрерывна. Таким образом, эта функция на основании § 5 представима в виде

$$K^*(P, P_1) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(P)\psi_i(P_1) + K_2(P, P_1),$$

где

$$\int_D |K_2(P, P_1)|\, dP_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$K(P, P_1) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(P) \psi_i(P_1) + K_2(P, P_1) + [K(P, P_1) - K^*(P, P_1)].$$

Полагая

$$K_1(P, P_1) = K_2(P, P_1) + [K(P, P_1) - K^*(P, P_1)],$$

будем иметь:

$$\int_D |K_1(P, P_1)|\, dP_1 \leqslant$$
$$\leqslant \int_D |K_2(P, P_1)|\, dP_1 + \int_D |K(P, P_1) - K^*(P, P_1)|\, dP_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, для ядер рассматриваемого типа теоремы Фредгольма справедливы на всей плоскости комплексного параметра λ, так же как и для непрерывных ядер, что и требовалось доказать.

ЛЕКЦИЯ XIX.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ФРЕДГОЛЬМА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА.

§ 1. Вывод свойств интегральных уравнений.

Развитая нами теория уравнений Фредгольма позволяет перейти к непосредственному решению задач Дирихле и Неймана, которые были нами ранее сведены к задаче отыскания решений некоторых интегральных уравнений.

Мы начнём с некоторых вспомогательных предложений.

Везде в дальнейшем мы будем рассматривать поверхности S, гладкие в смысле Ляпунова.

Лемма 1. *Пусть поверхность S удовлетворяет условиям* § 4 *лекции* XV, $\nu(S)$ — *непрерывная функция и потенциал простого слоя*

$$v=\int\limits_S \frac{\nu(S)\,dS}{r} \tag{XIX.1}$$

имеет внешнюю нормальную производную $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_e$ *на S, тождественно равную нулю. Тогда плотность $\nu(S)$ равна нулю тождественно.*

Доказательство. Как указано в § 4 лекции XV, в условиях леммы, v имеет правильную нормальную производную. Несколько видоизменяя приведенное выше доказательство единственности решения внешней задачи Неймана, можно убедиться, что теорема единственности остается справедливой.

Рассматриваемый потенциал есть гармоническая функция вне поверхности S, обращающаяся в нуль на бесконечности, как $\frac{1}{r}$. Её нормальная производная извне равна нулю на S. Следовательно, везде вне S этот потенциал тождественно равен нулю.

Потенциал простого слоя есть функция, непрерывная во всём пространстве. Следовательно, его предельное значение изнутри тоже нуль.

Применим теперь теорему единственности для внутренней задачи Дирихле. Рассматриваемый потенциал есть гармоническая функция внутри S. Её предельное значение на поверхности есть нуль. Следовательно, она тождественно равна нулю.

При этом предельное значение её нормальной производной изнутри есть также нуль.

Пользуясь тем, что

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_e - \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_i = 4\pi\nu(S), \tag{XIX.2}$$

и замечая, что нормальная производная v имеет пределом нуль и изнутри и извне, видим, что плотность есть нуль, что и требовалось доказать.

Если предельное значение $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_i$ на S равно нулю, то в силу теоремы единственности для задачи Неймана функция v есть постоянная внутри S.

Лемма 2. *Если в тех же предположениях относительно* $\nu(S)$ *имеем* $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_i = 0$ и $v_i = 0$, *то плотность тождественно равна нулю.*

Доказательство этой леммы совпадает с доказательством предыдущей.

Потенциал v есть функция непрерывная, значит $v_e = 0$. Из единственности решения внешней задачи Дирихле следует, что v — тождественный нуль также и вне S. Но при этом и формула (XIX.2) даёт

$$\nu(S) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Эти леммы позволяют непосредственно перейти к исследованию интегральных уравнений Фредгольма для задач Дирихле и Неймана, выведенных нами в лекции XVI.

Мы получили уравнения:

для *внутренней задачи Дирихле* —

$$\mu(S_0) + \iint\limits_S K(S_0, S)\,\mu(S)\,dS = \varphi(S_0); \tag{XIX.3}$$

для *внешней задачи Неймана* —

$$\nu(S_0) + \iint\limits_S K(S, S_0)\,\nu(S)\,dS = \psi(S_0); \tag{XIX.4}$$

для *внешней задачи Дирихле* —

$$\mu(S_0) - \iint\limits_S K(S_0, S)\,\mu(S)\,dS = \varphi(S_0); \tag{XIX.5}$$

для *внутренней задачи Неймана* —

$$\nu(S_0) - \iint\limits_S K(S, S_0)\,\nu(S)\,dS = \psi(S). \tag{XIX.6}$$

Ядро $K(S_0, S)$ имеет вид

$$K(S_0, S) = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos(n, r)}{r^2}. \tag{XIX.7}$$

В силу (XV.6) имеем неравенство

$$|K(S_0, S)| \leqslant \frac{A}{r^{2-\delta}}.$$

Следовательно, ядро $K(S_0, S)$ принадлежит к числу неограниченных ядер специального типа, рассмотренных в лекции XVIII, ибо в нашем случае, пользуясь обозначениями предыдущей лекции (см. § 7, лекция XVIII), имеем:

$$n = 2, \quad \alpha = 2 - \delta < n.$$

Таким образом, для этих уравнений имеют место все теоремы Фредгольма.

§ 2. Исследование уравнений.

Теорема 1. *Уравнения* (XIX.3) *и* (XIX.4) *всегда имеют единственные решения.*

Докажем это. Допустим, что интегральное уравнение

$$\nu(S_0) + \iint\limits_S K(S, S_0)\, \nu(S)\, dS = 0 \tag{XIX.8}$$

имеет решение $\nu(S)$. Благодаря усиленной полной непрерывности интегрального оператора с ядром $K(S, S_0)$, второе слагаемое в (XIX.8) непрерывно, следовательно непрерывно и первое слагаемое. Потенциал простого слоя

$$v = \int\limits_S \frac{\nu(S)}{r}\, dS$$

с непрерывной плотностью $\nu(S)$ имеет, как мы видели в § 4 лекции XV, правильную нормальную производную.

Предельные значения нормальной производной этого потенциала выражаются, как мы видели (теорема 2 из лекции XV), через плотность формулой

$$2\pi\left(\nu(S_0) + \iint\limits_S K(S, S_0)\, \nu(S)\, dS\right)$$

и в силу уравнения (XIX.8) равны нулю. Согласно лемме 1 из предыдущего параграфа $\nu(S) \equiv 0$ и, таким образом, однородное уравнение, соответствующее (XIX.4), не имеет нетривиальных решений.

При этом 1-я теорема Фредгольма даёт нам, что союзное однородное уравнение, совпадающее с (XIX.3) при $\varphi = 0$, тоже не имеет нетривиальных решений. Далее, из той же теоремы Фредгольма следует существование определённого единственного решения у (XIX.3) и (XIX.4) при произвольных правых частях.

Следовательно, мы можем получить решение этих уравнений, а одновременно и решение *внутренней задачи Дирихле* и *внешней задачи Неймана.*

Из доказанного, между прочим, вытекает доказательство второй половины теоремы Ляпунова из лекции XV, стр. 216.

Переходя к решению *внешней задачи Дирихле* и *внутренней задачи Неймана,* докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Каждое из уравнений*

$$\left.\begin{aligned} \mu(S_0) - \iint_S K(S_0, S)\,\mu(S)\,dS = 0, \\ \nu(S_0) - \iint_S K(S, S_0)\,\nu(S)\,dS = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIX.9)}$$

имеет одну и только одну фундаментальную функцию.

Прежде всего, заметим, что уравнения (XIX.9) союзны (сопряжены), и, следовательно, число линейно независимых решений у них одно и то же.

Для первого из уравнений (XIX.9) такой фундаментальной функцией служит единица. В самом деле, потенциал двойного слоя

$$w = \iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,\mu(S)\,dS$$

при $\mu = 1$ даёт величину телесного угла, под которым видна поверхность S, и, следовательно, его значения извне есть нуль. Но левая часть первого из уравнений (XIX.9) есть как раз предельное значение потенциала двойного слоя извне, и поэтому $\mu = 1$ должно обращать эту левую часть в нуль. Следовательно, число фундаментальных функций каждого из уравнений (XIX.9) не меньше одной.

Покажем, что каждое из уравнений (XIX.9) не может иметь двух линейно независимых решений.

Повторяя в точности рассуждение, приведённое в доказательстве теоремы 1, убеждаемся, что все решения второго из уравнений (XIX.9) удовлетворяют условию (XV.13).

Если бы существовали две фундаментальные функции $\nu_1(S)$ и $\nu_2(S)$, то оба потенциала

$$v_1 = \iint_S \frac{\nu_1(S)}{r}\,dS \quad \text{и} \quad v_2 = \iint_S \frac{\nu_2(S)}{r}\,dS$$

были бы гармоническими функциями внутри области, ограниченной S, и имели бы в этой области первые производные, непрерывные вплоть до границы. При этом предельные значения $\left.\frac{\partial v_1}{\partial n}\right|_i$ и $\left.\frac{\partial v_2}{\partial n}\right|_i$ у обеих функций были бы равны нулю; на основании теоремы единственности решения задачи Неймана обе эти функции представляли бы собой не что иное, как постоянные. Заменяя ν_i, $i=1, 2$, на $\alpha_i\nu_i$, где α_i, $i=1, 2$, — постоянные множители, мы можем добиться того, чтобы оба потенциала v_1 и v_2 были бы равны единице внутри области. Предположим, что это сделано. При этом потенциал

$$v=v_1-v_2=\int\limits_S\int \frac{1}{r}(\nu_1(S)-\nu_2(S))\,dS$$

с плотностью $\nu_1(S)-\nu_2(S)$ будет равен нулю внутри.

Его предельное значение v_i будет также равно нулю по непрерывности потенциала простого слоя. По лемме 2 плотность $\nu_1(S)-\nu_2(S)$ должна равняться нулю, что и доказывает нашу теорему.

Нами доказано существование собственной функции $\nu_0(S)$ второго уравнения (XIX.9). Можно считать, что величина потенциала $v_0=\int\limits_S\int \frac{\nu_0(S)}{r}\,dS$ внутри области Ω, ограниченной поверхностью S, равна единице. Функция $\nu_0(S)$ даёт соответствующее распределение электрических зарядов на поверхности проводника, заполняющего область Ω, ограниченную поверхностью S. Задача о нахождении потенциала заряженного проводника носит название *задачи Робэна*, а сам потенциал v_0 называется *потенциалом Робэна*.

Внутренняя задача Неймана заключалась в отыскании гармонической функции, такой, что

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_i=f_1(S). \tag{XIX.10}$$

Теорема 3. *Для существования решения внутренней задачи Неймана необходимо и достаточно, чтобы правая часть* (XIX.10), *т. е. функция* $f_1(S)$, *удовлетворяла условию*

$$\int\limits_S\int f_1(S)\,dS=0. \tag{XIX.11}$$

Необходимость этого условия вытекает из того, что если применить формулу Грина (V.16) к u и 1 (обе эти функции гармонические), то мы получим:

$$0=\int\limits_S\int \frac{\partial u}{\partial n}\,dS=\int\limits_S\int f_1(S)\,dS.$$

Достаточность следует при этом из того, что единица есть единственное решение интегрального уравнения (XIX.5), союзного с (XIX.6). Поэтому, если свободный член $\psi(S)$ уравнения (XIX.6) ортогонален к единице, то это уравнение по теореме Фредгольма разрешимо. Но $\psi(S)$ отличается лишь множителем от $f_1(S)$, и, следовательно, условие (XIX.11) необходимо и достаточно для решения уравнения (XIX.6), а с ним и задачи Неймана.

Перейдём теперь к решению *внешней задачи Дирихле.*

Как мы видели, интегральное уравнение (XIX.5) может и не иметь решения, так как соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальное решение. Этого можно было ожидать с самого начала. Искомая гармоническая функция u, удовлетворяющая условию

$$u|_e = f(S), \tag{XIX.12}$$

как мы видели, единственна. Она будет стремиться к нулю на бесконечности, вообще говоря, как $\frac{A}{r}$ (см. теорему 1 лекции XII), как, например, гармоническая функция $\frac{1}{r}$, равная единице на единичной сфере.

Мы же пытаемся представить функцию в виде потенциала двойного слоя, который убывает, как $\frac{A}{r^2}$. Разумеется, такое представление может оказаться невозможным. Попробуем теперь в соответствии с этим искать решение внешней задачи Дирихле в виде

$$u = \frac{\alpha}{r_0} + u_1,$$

где α — неопределённая постоянная, r_0 — расстояние точки (x, y, z) до начала координат, которую мы будем считать выбранной внутри S, а u_1 — потенциал двойного слоя

$$u_1 = \iint\limits_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \mu(S)\, dS.$$

Значения u_1 на поверхности S будут:

$$u_1|_S = f(S) - \frac{\alpha}{r_0}\Big|_S.$$

Уравнение (XIX.5) превратится при этом в уравнение

$$\mu(S_0) - \iint\limits_S K(S_0, S)\mu(S)\, dS = \varphi(S_0) + \frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{r_0}\Big|_{S_0}. \tag{XIX.13}$$

Потребуем, чтобы свободный член этого уравнения был ортогонален к $\nu_0(S)$ — собственной функции второго уравнения (XIX.9). Мы получим

$$\iint_S \varphi(S_0)\,\nu_0(S_0)\,dS_0 + \frac{\alpha}{2\pi}\iint_S \frac{\nu(S_0)}{r_0}\,dS_0 = 0.$$

Интеграл во втором слагаемом равен единице по предположению, и мы получим:

$$\alpha = -2\pi \iint_S \varphi(S_0)\,\nu_0(S_0)\,dS_0.$$

Определив, таким образом, постоянную α, мы получим из (XIX.13) разрешимое уравнение. Решая его, получим тем самым решение внешней задачи Дирихле.

ЛЕКЦИЯ XX.

ФУНКЦИЯ ГРИНА.

§ 1. Дифференциальные операторы с одной независимой переменной.

Во многих задачах математической физики, с которыми мы встречались, неизвестная функция определялась, помимо дифференциального уравнения, ещё условиями на границах области задания неизвестной функции.

Таковы были в своём большинстве задачи, связанные с решением уравнений эллиптического типа. Несколько позднее мы будем иметь случай убедиться в том, что и при решении краевых задач для уравнений других типов умение решать такую задачу с условиями на границе области приносит существенную пользу. Для того чтобы детальнее исследовать важнейшие свойства решений этих краевых задач, мы зададимся целью дать в явном виде представление таких решений.

Начнём с простейшего случая. Будем искать решение обыкновенного уравнения 2-го порядка

$$Ly \equiv p(x)\,y'' + q(x)\,y' + r(x)\,y = f(x) \qquad \text{(XX.1)}$$

в промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$, удовлетворяющее некоторым условиям на границах $x = 0$ и $x = 1$.

Мы предположим, что функция $p(x)$ непрерывна с производными до 2-го порядка и не обращается в нуль в промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$. Второе условие мы впоследствии снимем в некоторых примерах. Функцию $q(x)$ мы предположим непрерывной с производной 1-го порядка, а функцию $r(x)$ непрерывной в том же промежутке.

Хотя эта задача относится, формально говоря, к теории обыкновенных дифференциальных уравнений, тем не менее мы разберём её подробно. Нам придётся сделать несколько важных предварительных замечаний.

Составим оператор, сопряжённый с оператором Ly (см. § 2 (V)). Этот сопряжённый оператор будет иметь вид:

$$Mz \equiv (p(x)\,z)'' - (q(x)\,z)' + r(x)\,z. \qquad \text{(XX.2)}$$

Операторы M и L связаны между собой соотношением:

$$zLy - yMz = \frac{d}{dx}\left(pz\frac{dy}{dx} - y\frac{d(pz)}{dx} + qyz\right).$$

Формула Грина для отрезка $[0,1]$ для этих операторов имеет вид:

$$\{p_0y_0'z_0 - p_0y_0z_0' + (q_0 - p_0')y_0z_0\} - \{p_1y_1'z_1 - p_1y_1z_1' + (q_1 - p_1')y_1z_1\} + \\ + \int_0^1 (zLy - yMz)\,dx = 0, \qquad \text{(XX.3)}$$

где индексы 0 и 1 указывают, что берутся значения функций соответственно при $x = 0$ и при $x = 1$, например:

$$p_0 = p(0), \quad y_0 = y(0), \quad z_1' = z'(1).$$

Если функции y и z выбраны так, что фигурные скобки в формуле (XX.3) обращаются в нуль, то эта формула упрощается, и мы получим:

$$\int_0^1 (zLy - yMz)\,dx = 0. \qquad \text{(XX.4)}$$

Может случиться, что формула (XX.4) справедлива для любой пары функций y и z, принадлежащих некоторым двум семействам $\{y\}$ и $\{z\}$. Такие два семейства мы будем при этом называть сопряжёнными.

Разберём несколько примеров сопряжённых семейств функций для оператора (XX.1).

Будем изучать семейства функций y, удовлетворяющие на границах одному из двух линейных условий:

$$\left.\begin{aligned} &\text{I)}\ y_0 = 0, \\ &\text{II)}\ p_0y_0' + \alpha y_0 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XX.5)}$$

на конце $x = 0$, и аналогично

$$\left.\begin{aligned} &\text{I)}\ y_1 = 0, \\ &\text{II)}\ p_1y_1' + \beta y_1 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XX.6)}$$

на конце $x = 1$.

Представим первую фигурную скобку формулы (XX.3) в виде

$$-y_0\,[p_0z_0' + (p_0' - q_0 + \alpha)\,z_0] + z_0\,[p_0y_0' + \alpha y_0],$$

где α — некоторое постоянное. Подобным образом представим и вторую скобку. Тогда формула (XX.3) перепишется так:

$$-y_0[(pz)'+(\alpha-q)z]_{x=0}+z_0[py'+\alpha y]_{x=0}+\\+\int_0^1(zLy-yMz)\,dx+y_1[(pz)'+(\beta-q)z]_{x=1}-\\-z_1[py'+\beta y]_{x=1}=0, \quad \text{(XX.7)}$$

где β — также постоянное.

Из этого представления вытекает несколько простых следствий.

Если семейство $\{y\}$ удовлетворяет на конце $x=0$ первому условию, то для того чтобы обращался в нуль только внеинтегральный член при $x=0$, в качестве семейства $\{z\}$ можно взять любое семейство функций, удовлетворяющих при $x=0$ условию

$$\text{I}^a)\ z_0=0.$$

Если семейство $\{y\}$ удовлетворяет второму условию на конце $x=0$, то семейство $\{z\}$ достаточно подчинить условию:

$$\text{II}^a)\ p_0z_0'+(p_0'-q_0+\alpha)z_0=0.$$

Для семейства $\{y\}$, подчинённого обоим условиям, т. е. у которого $y_0'=y_0=0$, можно функции $\{z\}$ никаким условиям при $x=0$ не подчинять. Обратно, если не накладывать ограничений на семейство $\{y\}$, то функции $\{z\}$ нужно подчинить условиям $z_0=z_0'=0$. Совершенно так же можно исследовать конец $x=1$, где условия, разбираемые нами, будут иметь вид:

$$\text{I})\ y_1=0,$$
$$\text{II})\ p_1y_1'+\beta y_1=0,$$
$$\text{I}^a)\ z_1=0,$$
$$\text{II}^a)\ p_1z_1'+(p_1'-q_1+\beta)z_1=0.$$

Условия I^a или II^a, поставленные на обоих концах промежутка, являются достаточными для того, чтобы семейство $\{z\}$ было сопряжённым с семейством $\{y\}$, если для последнего выполняются условия I или II. Эти условия будут и необходимы, если в качестве семейства $\{y\}$ взять множество всех функций, удовлетворяющих условиям I или II на обоих концах промежутка и имеющих достаточное количество непрерывных производных. В дальнейшем мы будем определять семейства $\{y\}$ и $\{z\}$ именно таким образом.

Можно рассматривать и более общий тип условий, накладываемых на семейство $\{y\}$. Эти условия общего типа могут связывать значения y и y' на обоих концах. Мы не будем заниматься перечислением или классификацией таких условий, укажем лишь на способ их получения.

Билинейная форма

$$\Phi(y_0, y_0', y_1, y_1';\ z_0, z_0', z_1, z_1') \equiv$$
$$\equiv p_0 y_0' z_0 - p_0 y_0 z_0' + (q_0 - p_0') y_0 z_0 - p_1 y_1' z_1 + p_1 q_1 z_1' - (q_1 - p_1') y_1 z_1$$

двух четвёрок переменных уничтожается для произвольных значений одной четвёрки тогда и только тогда, когда значения всех переменных другой четвёрки суть нули. Если между переменными одной четвёрки, например y_0, y_0', y_1, y_1', существуют линейные связи, то, выражая некоторые из переменных через остальные, мы превратим эту форму в другую форму, линейную относительно y, но зависящую от меньшего числа переменных. Условием уничтожения этой формы будет обращение в нуль коэффициентов при этих оставшихся переменных. Таким образом, сумма числа условий, наложенных на $\{y\}$ и на $\{z\}$, равна четырём.

Рассмотрим, например, уравнение

$$Ly \equiv y'' + k^2 y = 0.$$

При этом $p = 1$, $q = 0$, $r = k^2$, и пусть условия, наложенные на семейство $\{y\}$, будут

$$y_0 = y_1,$$
$$y_0' = y_1'.$$

Согласно нашей теории форма Φ примет вид:

$$\Phi \equiv y_0 (z_0' - z_1') + y_0' (z_0 - z_1) = 0.$$

Следовательно, сопряжённые условия будут:

$$z_0 = z_1,$$
$$z_0' = z_1'.$$

§ 2. Сопряжённые операторы и сопряжённые семейства.

Понятие о сопряжённых семействах или сопряжённых условиях относится не только к обыкновенным уравнениям 2-го порядка. Его легко перенести на случай, когда оператор L есть линейный дифференциальный оператор с частными производными любого порядка. Выше мы определили понятие оператора M, сопряжённого с данным дифференциальным оператором L. Интегральную формулу, справедливость которой для двух сопряжённых операторов была выше доказана, мы можем теперь принять за определение сопряжённых операторов.

Определение. *Оператор* Mv мы будем называть *сопряжённым* с оператором Lu и два *семейства функций* $\{u\}$ и $\{v\}$, заданных в области Ω, мы будем называть *сопряжёнными* относительно L и M в этой области, если

$$\int_{\Omega} vLu\, d\Omega = \int_{\Omega} uMv\, d\Omega \tag{XX.8}$$

для любых функций u и v из соответствующих семейств.

Условия, которыми определяются два сопряжённых относительно операторов L и M семейства, носят название сопряжённых.

Определение. *Оператор L называется самосопряжённым, если ему сопряжённый совпадает с ним самим, т. е.*

$$Mu \equiv Lu.$$

Аналогично *для любого самосопряжённого оператора семейство функций, совпадающее со своим сопряжённым, называется самосопряжённым семейством.*

Мы рассмотрим ещё несколько простейших примеров.

Пример 1.

$$Ly = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y.$$

Семейство функций $\{y\}$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ выберем так, чтобы иметь:

$$y_0 = y_0' = \ldots = y_0^{(n-1)} = 0. \tag{XX.9}$$

Легко видеть, что сопряжённый оператор будет

$$Mz = (-1)^n \frac{d^n (p_0 z)}{dx^n} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} (p_1 z)}{dz^{n-1}} + \ldots + p_n z.$$

Заметив, что

$$\varphi \frac{d^m \psi}{dx^m} + (-1)^m \psi \frac{d^m \varphi}{dx^m} =$$
$$= \frac{d}{dx} \left[\varphi \frac{d^{m-1}\psi}{dx^{m-1}} - \frac{d\varphi}{dx} \frac{d^{m-2}\psi}{dx^{m-1}} + \frac{d^2\varphi}{dx^2} \frac{d^{m-3}\psi}{dx^{m-3}} - \ldots \right],$$

легко взять в конечном виде неопределённый интеграл

$$\int (zLy - yMz)\, dx.$$

Не вычисляя его до конца, мы видим, что он выразится как билинейная форма относительно производных

$$y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)},\ z,\ z',\ \ldots,\ z^{(n-1)},$$

коэффициенты которой суть функции переменной x.

В силу условий (XX.9) значение этой билинейной формы при $x = 0$ есть нуль. Для того чтобы её значение при $x = 1$ также было нулём, достаточно положить:

$$z_1 = z_1' = \ldots = z_1^{(n-1)} = 0. \tag{XX.10}$$

(Это же условие и необходимо, если мы ничего не знаем относительно значений y и её производных при $x = 1$.)

При этом

$$\int_0^1 (zLy - yMz)\, dx = 0.$$

Таким образом, условия (XX.10) — сопряжённые с (XX.9).

Пример. 2. Рассмотрим оператор

$$Lu \equiv \Delta u \tag{XX.11}$$

и пусть изучается семейство функций $\{u\}$ в области Ω двух переменных x, y, ограниченной контуром s, удовлетворяющих условию

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial s}\right]_s = 0, \tag{XX.12}$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внутренней нормали в точке контура, $\frac{\partial u}{\partial s}$ — производная по касательной, соответствующей положительному обходу контура. Формула Грина даёт:

$$\int\int_\Omega (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\, d\Omega = \int_s \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) ds =$$

$$= \int_s \left\{\left(v\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial s}\right) - u\frac{\partial v}{\partial n} - v\left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial s}\right)\right\} ds.$$

Интегрируя по частям член

$$\int_s \beta v \frac{\partial u}{\partial s}\, ds$$

и замечая, что внеинтегральные члены пропадут, благодаря периодичности на контуре функций β, v и u, будем иметь:

$$\int\int_\Omega (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\, d\Omega =$$

$$= \int_s \left\{v\left[\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial s}\right] - u\left[\frac{\partial v}{\partial n} + \alpha v - \frac{\partial \beta v}{\partial s}\right]\right\} ds.$$

Естественно назвать *выражение*

$$\left[\frac{\partial}{\partial n}+\left(\alpha+\frac{\partial\beta}{\partial s}\right)v-\beta\frac{\partial v}{\partial s}\right]_s$$

сопряжённым с (XX.12) *относительно оператора* Δ.

Сопряжённые относительно оператора Δ семейства будут — семейство $\{u\}$, удовлетворяющее условию

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial s}\right]_s=0,$$

и семейство $\{v\}$, удовлетворяющее условию

$$\left[\frac{\partial v}{\partial n}+\left(\alpha-\frac{\partial\beta}{\partial s}\right)v-\beta\frac{\partial v}{\partial s}\right]_s=0.$$

Для двух таких семейств получим:

$$\int\limits_{\Omega}\int v\,\Delta u\,d\Omega=\int\limits_{\Omega}\int u\,\Delta v\,d\Omega.$$

Пример 3. Если семейство $\{u\}$ есть семейство функций, не подчинённых никаким требованиям, то сопряжённое семейство в области Ω относительно оператора Лапласа будет удовлетворять двум условиям:

$$v\Big|_s=0,\quad \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_s=0.$$

Это следует из того, что только при указанных условиях интеграл

$$\int\limits_{\Omega}\int(u\,\Delta v-v\,\Delta u)\,d\Omega$$

обращается в нуль при произвольном выборе функции u, что и является условием сопряжённости.

На этих примерах нами достаточно пояснено понятие о сопряжённых семействах и сопряжённых операторах. Переходим теперь к более детальному исследованию задачи.

§ 3. Основная лемма об интегралах сопряжённых уравнений.

Поставим следующую задачу: найти решение уравнения (XX.1), удовлетворяющее условиям

$$\left.\begin{aligned}&[\alpha_0 py'+\beta_0 y]_{x=0}=a_0,\\&[\alpha_1 py'+\beta_1 y]_{x=1}=a_1\end{aligned}\right\}\qquad(\text{XX.13})$$

или условиям

$$\left.\begin{aligned}&[\alpha_0 py'+\beta_0 y]_{x=0}=0,\\&[\alpha_1 py'+\beta_1 y]_{x=1}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(\text{XX.13}')$$

Задачи подобного рода встречаются, например, если нам нужно найти форму равновесия струны переменной плотности и переменного натяжения, на концах которой задано некоторое соотношение между отклонением и составляющей на ось y натяжения струны. Переменное натяжение может зависеть от того, что струна не горизонтальна. При этом вес каждого её участка будет влиять на величину натяжения выше этого участка.

Лемма 1. *Пусть* $Ly \equiv py'' + qy' + ry$ *и* $Mz \equiv (pz)'' - (qz)' + rz$ — *два сопряжённых оператора с коэффициентами* $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, *непрерывными на отрезке* $0 \leqslant x \leqslant 1$, *причём* $p(x)$ *обладает двумя непрерывными производными, а* $q(x)$ — *одной непрерывной производной на том же отрезке.*

Кроме того, предполагается, что $p(x)$ нигде на нашем отрезке *не обращается в нуль.* Тогда, если $y_1(x)$ удовлетворяет уравнению

$$Ly = 0 \tag{XX.14}$$

и условию

$$[\alpha_0 py' + \beta_0 y]_{x=0} = 0, \tag{XX.15}$$

то функция

$$z_1(x) = \frac{y_1(x)}{p} e^{\int\limits_c^x \frac{q}{p}\,dx} \tag{XX.16}$$

есть решение сопряжённого уравнения

$$Mz = 0, \tag{XX.17}$$

удовлетворяющее условию

$$[(\alpha_0 pz)' + (\beta_0 - \alpha_0 q) z]_{x=0} = 0, \tag{XX.18}$$

сопряжённому с условием (XX.15). Доказательство этой леммы можно выполнить простой проверкой. Имеем:

$$(pz_1)' = y_1' e^{\int\limits_c^x \frac{q}{p}\,dx} + y_1 \frac{q}{p} e^{\int\limits_c^x \frac{q}{p}\,dx},$$

$$Mz_1 = [(pz_1)' - qz_1]' + rz_1 = e^{\int\limits_c^x \frac{q}{p}\,dx} \frac{1}{p} [py_1'' + qy_1' + ry_1] = 0.$$

Таким образом, функция (XX.16) есть действительно решение (XX.17). Проверим теперь выполнение условия (XX.18):

$$[(\alpha_0 pz_1)' + (\beta_0 - \alpha_0 q) z_1]_{x=0} =$$

$$= \left[\alpha_0 y_1' + \alpha_0 y_1 \frac{p}{q} + \left(\frac{\beta_0}{p} - \frac{\alpha_0 q}{p}\right) y_1\right]_{x=0} e^{\int\limits_c^0 \frac{q}{p}\,dx} =$$

$$= \left[\frac{1}{p} (\alpha_0 p y_1' + \beta_0 y_1)\right]_{x=0} e^{\int\limits_c^0 \frac{q}{p}\,dx} = 0.$$

Лемма доказана.

Аналогично, если y_2 есть решение уравнения (XX.14), удовлетворяющее условию

$$[\alpha_1 p y_2' + \beta_1 y_2]_{x=1} = 0, \tag{XX.19}$$

то

$$z_2 = \frac{y_2}{p} e^{\int\limits_c^x \frac{q}{p}\,dx} \tag{XX.20}$$

будет решением уравнения (XX.17), удовлетворяющим условию:

$$[(\alpha_1 p z)' + (\beta_1 - \alpha_1 q) z]_{x=1} = 0. \tag{XX.21}$$

Формулам (XX.16) и (XX.20) можно придать несколько другую форму в случае, если y_1 и y_2 линейно независимы. Пользуясь известным выражением определителя Вронского:

$$C[y_1' y_2 - y_2' y_1] = e^{-\int\limits_c^x \frac{q}{p}\,dx}, \tag{XX.22}$$

мы будем иметь, фиксируя должным образом постоянный произвольный множитель,

$$z_1 = \frac{y_1}{p[y_1' y_2 - y_2' y_1]},$$

$$z_2 = \frac{y_2}{p[y_1' y_2 - y_2' y_1]}. \tag{XX.23}$$

Замечание. Очевидно, что наша лемма взаимна и может быть формулирована так:

Если z_1 и z_2 — решения уравнения $Mz = 0$, удовлетворяющие соответственно условиям (XX.18) и (XX.21), то

$$y_1 = \frac{z_1}{p} e^{\int\limits_c^x \frac{2p' - q}{p}\,dx} = Cpz_1 e^{-\int\limits_c^x \frac{q}{p}\,dx},$$

$$y_2 = \frac{z_2}{p} e^{\int\limits_c^x \frac{2p' - q}{p}\,dx} = Cpz_2 e^{-\int\limits_c^x \frac{q}{p}\,dx},$$

где C — некоторое постоянное, являются решениями уравнения $Ly = 0$, удовлетворяющими соответственно условиям (XX.15) и (XX.19).

Из формул (XX.23) следует $\frac{d}{dx}\left(\ln \frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\ln \frac{y_1}{y_2}\right)$, т. е.

$$\frac{z_1'}{z_2} - \frac{z_2'}{z_2} = \frac{y_1'}{y_1} - \frac{y_1'}{y_2},$$

или

$$\frac{z_1' z_2 - z_2' z_1}{z_1 z_2} = \frac{y_1' y_2 - y_2' y_1}{y_1 y_2} = \frac{1}{p y_1 z_2} = \frac{1}{p y_2 z_1},$$

откуда имеем:

$$y_1 = \frac{z_1}{p\,(z_1' z_2 - z_2' z_1)}, \quad y_2 = \frac{z_2}{p\,(z_1' z_2 - z_2' z_1)}. \qquad \text{(XX.23')}$$

Полезно ещё заметить формулы

$$y_1 z_2 = z_1 y_2,$$

$$y_1' z_2 - y_2' z_1 = z_1' y_2 - y_1 z_2' = \frac{1}{p},$$

проверяемые непосредственно.

Следствие. *Если уравнение* (XX.14) *имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее условиям* (XX.15) *и* (XX.19), *то уравнение* (XX.17) *имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее условиям* (XX.18) *и* (XX.21), *и наоборот.*

При дальнейшем исследовании нам важно будет различать *два случая*:

1. Уравнение (XX.14) не имеет нетривиальных решений, удовлетворяющих условиям (XX.15) и (XX.19).

2. Уравнение (XX.14) имеет такое решение.

Мы докажем далее, что в первом случае уравнение (XXI.1) всегда имеет определённое единственное решение, удовлетворяющее условиям (XX.13). Во втором случае это будет не так.

Задачу о нахождении решения (XX.14) при условиях (XX.15) и (XX.19) мы будем называть однородной задачей.

Пусть y_1 есть решение однородной задачи. Нетрудно видеть, что такое решение может быть только одно с точностью до постоянного множителя. Действительно, если y_1 и y_2 — два линейно независимых решения уравнения (XX.14), то их определитель Вронского не равен нулю; следовательно, отношения

$$\frac{y_1'}{y_1} \text{ и } \frac{y_2'}{y_2},$$

наверное, не равны между собой, и поэтому ни y_2, и никакая линейная комбинация

$$C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где $C_2 \neq 0$, не удовлетворяют условиям на границе.

По следствию из леммы 1 (XX)

$$z_1 = \frac{y_1}{p} e^{\int\limits_c^x \frac{q}{p}\,dx}$$

есть единственное решение сопряжённой задачи. Докажем теперь для разбираемого второго случая теорему.

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение* (XX.1) *имело решение, удовлетворяющее* (XX.13), *необходимо соблюдение условия*

$$a_0 z_1\Big|_{x=0} + \int_0^1 f(x) z_1\,dx - a_1 z_1\Big|_{x=1} = 0. \qquad \text{(XX.24)}$$

Пусть функция $y_1(x)$ — нетривиальное решение однородной задачи, т. е. удовлетворяет уравнению (XX.14) и условиям (XX.15) и (XX.19); тогда функция $z_1(x)$, определяемая по формуле (XX.16), будет удовлетворять сопряжённому уравнению и сопряжённым краевым условиям (XX.18) и (XX.21).

Применяя формулу (XX.7) к функции $y(x)$, являющейся решением (XX.1) при условиях (XX.13), и $z_1(x)$, мы непосредственно получим (XX.24).

§ 4. Функция влияния.

Займёмся подробным разбором первого случая.

Пусть x_0 — произвольная точка промежутка $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, и пусть функция z_ε удовлетворяет уравнению

$$Mz_\varepsilon = \begin{cases} 0 \text{ при } |x - x_0| > \varepsilon, \\ \dfrac{1}{2\varepsilon} \text{ при } |x - x_0| \leqslant \varepsilon; \end{cases}$$

тогда

$$\int_0^1 yMz_\varepsilon\,dx = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{x_0+\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} y\,dx.$$

Переходя в этой формуле к пределу при $\varepsilon \to 0$ и пользуясь теоремой о среднем, будем иметь:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 yMz_\varepsilon\,dx = y(x_0).$$

Если z_ε и y принадлежат сопряжённым свойствам, т. е. удовлетворяют условиям (XX.15), (XX,19), (XX.18) и (XX.21), то формула (XX.8) даст:

$$y(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 y\,M\varepsilon_\varepsilon\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 z_\varepsilon Ly\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 z_\varepsilon f(x)\,dx.$$

При тех же z_ε и функции y, удовлетворяющей общим условиям (XX.14), из формулы (XX.7) получим:

$$y(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[z_\varepsilon(0)\,a_0 + \int_0^1 z_\varepsilon f(x)\,dx - z_\varepsilon(1)\,a_1\right].$$

Если бы при этом оказалось, что функция z_ε при $\varepsilon \to 0$ равномерно стремится к предельной функции

$$\lim_{\varepsilon \to 0} z_\varepsilon = G(x, x_0),$$

зависящей, конечно, от параметра x_0, то в формулах, выражающих $y(x_0)$, можно было бы перейти к пределу. Условимся называть функцию $G(x, x_0)$ функцией Грина для оператора L.

С помощью функции Грина решение уравнения (XX.1), удовлетворяющее (XX.13), представлялось бы в виде

$$y(x_0) = G(0, x_0)\, a_0 + \int_0^1 G(x, x_0) f(x)\, dx - G(1, x_0)\, a_1. \qquad \text{(XX.25)}$$

Если $a_0 = a_1 = 0$, то мы имели бы

$$y(x_0) = \int_0^1 G(x, x_0) f(x)\, dx. \qquad \text{(XX.26)}$$

Не вычисляя z_ε, можно выяснить непосредственно, какой должна быть функция Грина, и даже построить её. Интегрируя Mz_ε в промежутке $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, где $\delta > \varepsilon$, получим:

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} Mz_\varepsilon\, dx = 1.$$

С другой стороны,

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} Mz_\varepsilon\, dx = (pz_\varepsilon)' \Big|_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} - \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [(qz_\varepsilon)' - rz_\varepsilon]\, dx,$$

откуда

$$1 = (pz_\varepsilon)' \Big|_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} - \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [(qz_\varepsilon)' - rz_\varepsilon]\, dx.$$

Предполагая z_ε и z'_ε равномерно ограниченными, мы видим, что при достаточно малом δ интегралом в правой части последней формулы можно пренебречь и в пределе получаем:

$$(pz_\varepsilon) \Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = 1.$$

Но функция $p(x)$ непрерывна вместе с производной, и поэтому, считая z_ε непрерывной, получим:

$$(pz_\varepsilon)' \Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = p(x_0)\, z'_\varepsilon \Big|_{x_0-0}^{x_0+0},$$

откуда

$$z'_\varepsilon \Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = \frac{1}{p(x_0)}.$$

§ 5. Функция Грина и её построение.

Наводящие соображения, которыми мы воспользовались, не дают, конечно, доказательства справедливости наших рассуждений. Однако, исходя из последней формулы, мы можем строго обосновать их.

Определение. Назовём функцией Грина для оператора Ly и краевых условий (XX.13) функцию $G(x, x_0)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. Как функция переменного x при любом x_0 она удовлетворяет условиям, сопряжённым с нашими условиями для оператора Ly, т. е.

$$p(0)\, G'_x(0, x_0) + (p'(0) - q(0) + \alpha)\, G(0, x_0) = 0,$$
$$p(1)\, G'_x(1, x_0) + (p'(1) - q(1) + \beta)\, G(0, x_0) = 0.$$

2. В промежутках

$$0 \leqslant x < x_0, \quad x_0 < x \leqslant 1$$

функция $G(x, x_0)$ непрерывна вместе с производными до 2-го порядка и удовлетворяет уравнению, сопряжённому с уравнением $Ly = 0$, т. е.

$$Mz \equiv \frac{d^2(p(x)z)}{dx^2} - \frac{d(q(x)z)}{dx} + r(x)z = 0.$$

3. В точке $x = x_0$ функция $G(x, x_0)$ как функция x сама непрерывна, а её производная разрывна, причём

$$G'_x(x_0 + 0, x_0) - G'_x(x_0 - 0, x_0) = \frac{1}{p(x_0)}. \qquad \text{(XX.27)}$$

Функцию Грина, введённую нами, нетрудно построить фактически.

Пусть z_1 — решение уравнения $Mz = 0$, удовлетворяющее условию (XX.18), а z_2 — решение того же уравнения, удовлетворяющее условию (XX.21). Эти решения независимы, так как иначе существовало бы нетривиальное решение уравнения $Mz = 0$ и, следовательно, уравнения $Ly = 0$, и мы имели бы второй случай. Каждое из них определено лишь с точностью до произвольного постоянного множителя.

Очевидно, что

$$G(x, x_0) = a(x_0)\, z_1(x), \quad 0 \leqslant x < x_0;$$
$$G(x, x_0) = b(x_0)\, z_2(x), \quad x_0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Из того факта, что $G(x, x_0)$ — непрерывная функция, а первая её производная терпит разрыв непрерывности при $x = x_0$, удовлетворяющий (XX.25), получим:

$$a(x_0)\, z_1(x_0) - b(x_0)\, z_2(x_0) = 0,$$
$$a(x_0)\, z'_1(x_0) - b(x_0)\, z'_2(x_0) = -\frac{1}{p(x_0)},$$

откуда получаем:

$$a(x_0) = \frac{-z_2(x_0)}{p(x_0)[z_2(x_0)z_1'(x_0) - z_2'(x_0)z_1(x_0)]},$$

$$b(x_0) = \frac{-z_1(x_0)}{p(x_0)[z_2(x_0)z_1'(x_0) - z_2'(x_0)z_1(x_0)]}.$$

Стоящий в знаменателе определитель Вронского не равен нулю, так как $z_1(x)$ и $z_2(x)$ линейно независимы.

Сравнивая эти выражения с формулами (XX.23), мы видим, что

$$a(x_0) = y_2(x_0); \quad b(x_0) = y_1(x_0),$$

где $y_1(x_0)$ и $y_2(x_0)$ суть некоторые решения уравнения $Ly = 0$, удовлетворяющие соответственно условиям (XX.15) и (XX.19).

Таким образом, получаем следующее представление для функции Грина:

$$G(x, x_0) = \begin{cases} y_2(x_0)z_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ y_1(x_0)z_2(x), & x_0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{XX.28}$$

Формула (XX.28) не только даёт функцию Грина в явном виде, но позволяет ещё исследовать некоторые её свойства.

Свойство 1. Функция Грина непрерывна в квадрате

$$0 \leqslant x \leqslant 1; \quad 0 \leqslant x_0 \leqslant 1$$

на плоскости xOx_0.

Свойство 2. Первые производные от функции Грина непрерывны везде, кроме главной диагонали $x = x_0$, где они имеют разрыв первого рода, причем производная по направлению диагонали непрерывна, а производные по x и по x_0 удовлетворяют условиям:

$$G_x'(x_0 + 0, x_0) - G_x'(x_0 - 0, x_0) = \frac{1}{p(x_0)},$$

$$G_{x_0}'(x_0, x_0 + 0) - G_{x_0}'(x_0, x_0 - 0) = \frac{1}{p(x_0)}.$$

Эти соотношения легко проверить непосредственно.

Из формулы (XX.28) следует

Теорема 2. *Функция Грина $G(x, x_0)$ как функция аргумента x_0 служит функцией Грина для оператора Mz при условиях* (XX.18) *и* (XX.21), *т. е. при замене задачи на сопряжённую аргументы функции Грина лишь меняются местами.*

Нам остаётся проверить, что формулы (XX.25) или (XX.26) действительно дают решение поставленной задачи. Достаточно при этом проверить формулу (XX.26), так как задача об отыскании решения (XX.1) с условиями (XX.13) всегда может быть сведена к задаче с однородными условиями (XX.13').

Если эта последняя имеет решение, то и первоначальная задача имеет решение. Нами доказано, однако, что если решение задачи существует, то оно представимо в виде (XX.26).

Итак, достаточно установить, что функция

$$y(x_0) = \int_0^1 G(x, x_0) f(x)\,dx \tag{XX.29}$$

удовлетворяет уравнению (XX.1) и условиям (XX.13′).

Продифференцируем по x_0 полученное выражение. Мы имеем:

$$y(x_0) = \int_0^{x_0} G(x, x_0) f(x)\,dx + \int_{x_0}^1 G(x, x_0) f(x)\,dx,$$

$$y'(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{\partial G}{\partial x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^1 \frac{\partial G}{\partial x_0} f(x)\,dx + G(x_0, x_0) f(x_0) - G(x_0, x_0) f(x_0),$$

$$y'(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{\partial G}{\partial x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^1 \frac{\partial G}{\partial x_0} f(x)\,dx. \tag{XX.30}$$

Далее,

$$y''(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{\partial^2 G}{\partial x_0^2} f(x)\,dx + \int_{x_0}^1 \frac{\partial^2 G}{\partial x_0^2} f(x)\,dx + f(x_0) \left.\frac{\partial G}{\partial x_0}\right|_{x_0 - 0} - f(x_0) \left.\frac{\partial G}{\partial x_0}\right|_{x_0 + 0} =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial^2 G}{\partial x_0^2} f(x)\,dx + f(x_0) \frac{1}{p(x_0)}. \tag{XX.31}$$

Пользуясь этим, получим:

$$p(x_0) y''(x_0) + q(x_0) y'(x_0) + r(x_0) y(x_0) = f(x_0) + \int_0^1 L_0 G(x, x_0) f(x)\,dx.$$

Но $G(x, x_0)$ как функция своего второго аргумента x_0 удовлетворяет уравнению $L_0 G = 0$, отсюда

$$p(x_0) y''(x_0) + q(x_0) y'(x_0) + r(x_0) y(x_0) = f(x_0),$$

что и требовалось доказать.

Нами изучена задача в первом случае. Мы установили, что при этом всегда существует определённое решение уравнения (XX.1), удовлетворяющее условиям (XX.13) или (XX.13′) и представимое в виде (XX.25) или (XX.26), где $G(x, x_0)$ — определённая нами функция Грина.

§ 6. Обобщённая функция Грина для линейного уравнения 2-го порядка.

Разберём более подробно *второй* случай.

Лемма 2. *Если* $y_0(x)$ *и* $z_0(x)$ *являются решениями уравнений* $Ly=0$ *и* $Mz=0$, *соответственно удовлетворяющими однородным условиям* (XX.15), (XX.19) и (XX.18), (XX.21), *то*

$$\int_0^1 y_0(x)\, z_0(x)\, dx \neq 0. \tag{XX.32}$$

Это замечание вытекает из того, что

$$\int_0^1 y_0(x)\, z_0(x)\, dx = c\int_0^1 \frac{y_0^2}{p} e^{\int\limits_c^x \frac{q}{p}\,dx} dx.$$

Так как подинтегральное выражение постоянно по знаку, то интеграл не может равняться нулю.

Лемма 3. *Уравнение*

$$Mz = z_0$$

не может иметь решения, удовлетворяющего одновременно (XX.18) и (XX.21), *а уравнение* $Ly=y_0$ *не может иметь решения, удовлетворяющего одновременно условиям* (XX.15) и (XX.19).

В самом деле, если бы это было так, то, применяя формулу (XX.7) и подставляя в неё вместо y решение y_0, мы получили бы:

$$\int_0^1 y_0 Mz\, dz = \int_0^1 z_0 y_0\, dx = 0,$$

что противоречит лемме 2. Точно так же доказывается и вторая половина утверждения.

Определение. Рассмотрим теперь функцию $G_1(x, x_0)$, определённую условиями:

1. Как функция переменного x при любом x_0 функция $G_1(x, x_0)$ удовлстворяет условиям:

$$\left.\begin{aligned} p(0)\frac{\partial G_1(0, x_0)}{\partial x} + (p'(0) - q(0) + \alpha)\, G_1(0, x_0) = 0,\\ p(1)\frac{\partial G_1(1, x_0)}{\partial x} + (p'(1) - q(1) + \beta)\, G_1(1, x_0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{XX.33}$$

2. В промежутках

$$0 \leqslant x < x_0, \quad x_0 < x \leqslant 1$$

функция $G_1(x, x_0)$ есть непрерывная с производными до 2-го порядка функция, удовлетворяющая уравнению:

$$MG_1(x, x_0) = a(x_0) z_0(x); \tag{XX.34}$$

функцию $a(x_0)$ мы определим позднее.

3. В точке $x = x_0$ функция $G_1(x, x_0)$ как функция x сама непрерывна, а производные её разрывны, причём

$$\frac{\partial G_1(x_0+0, x_0)}{\partial x} - \frac{\partial G_1(x_0-0, x_0)}{\partial x} = \frac{1}{p(x_0)}. \tag{XX.35}$$

4.
$$\int_0^1 G_1(x, x_0) y_0(x)\, dx = 0. \tag{XX.36}$$

Эту функцию мы назовём *обобщённой функцией Грина*. Условие (XX.35) позволяет определить множитель $a(x_0)$.

Переходим к явному построению функции G_1.

Обозначим через $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ частные решения уравнения

$$Ly = y_0, \tag{XX.37}$$

удовлетворяющие условиям:

$$y^{(1)}|_{x=0} = y^{(1)\prime}|_{x=0} = 0,$$

$$y^{(2)}|_{x=1} = y^{(2)\prime}|_{x=1} = 0,$$

и аналогично $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$ — частные решения уравнения

$$Mz = z_0, \tag{XX.38}$$

удовлетворяющие условиям:

$$z^{(1)}|_{x=0} = z^{(1)\prime}|_{x=0} = 0,$$

$$z^{(2)}|_{x=1} = z^{(2)\prime}|_{x=1} = 0.$$

Очевидно, что разность $y^{(2)} - y^{(1)} = y_1$ есть частное решение уравнения (XX.14), линейно независимое с y_0. В самом деле, если бы $y^{(2)} - y^{(1)} = \alpha y_0$, то обе функции $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ должны были бы удовлетворять на концах условиям (XX.15) и (XX.19), что невозможно в силу леммы 3.

Задание y_0 определяет функции $y^{(2)}$, $y^{(1)}$ и y_1. Положим

$$z_0 = \frac{y_0}{p(y_0' y_1 - y_1' y_0)}, \quad z_1 = \frac{y_1}{p(y_0' y_1 - y_1' y_0)}.$$

Непосредственно проверяется, что функции $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ могут быть выражены через y_0 и y_1 в виде

$$y^{(1)}(x_0)=y_0(x_0)\int_0^{x_0} y_0(x)z_1(x)\,dx-y_1(x_0)\int_0^{x_0} y_0(x)z_0(x)\,dx,$$

$$y^{(2)}(x_0)=y_0(x_0)\int_1^{x_0} y_0(x)z_1(x)\,dx-y_1(x_0)\int_1^{x_0} y_0(x)z_0(x)\,dx.$$

В самом деле, равенства $y^{(1)}(0)=y^{(2)}(1)=0$ очевидны. Далее

$$y^{(1)\prime}(0)=[y_0(0)]^2z_1(0)-y_1(0)y_0(0)z_0(0)=0,$$

$$y^{(2)\prime}(1)=[y_0(1)]^2z_1(1)-y_1(1)y_0(1)z_0(1)=0.$$

Кроме того,

$$y^{(1)\prime}=y_0'(x_0)\int_0^{x_0} y_0(x)z_1(x)\,dx-y_1'(x_0)\int_0^{x_0} y_0(x)z_0(x)\,dx,$$

$$y^{(1)\prime\prime}=y_0''(x_0)\int_0^{x_0} y_0(x)z_1(x)\,dx-y_1''(x_0)\int_0^{x_0} y_0(x)z_0(x)\,dx+$$
$$+[y_0'(x_0)z_1(x_0)-y_1'(x_0)z_0(x_0)]\,y_0(x),$$

откуда $Ly^{(1)}=y_0(x)$, что и требовалось доказать.

Так же доказывается и формула для $y^{(2)}$. Составляя разность

$$y_1(x_0)=y^{(2)}(x_0)-y^{(1)}(x_0)=$$
$$=-y_0(x_0)\int_0^1 y_0(x)z_1(x)\,dx+y_1(x_0)\int_0^1 y_0(x)z_0(x)\,dx,$$

видим, что

$$\int_0^1 y_0(x)z_1(x)\,dx=0,$$

$$\int_0^1 y_0(x)z_0(x)\,dx=1,$$

т. е.

$$\int_0^1 y_0(x)z^{(1)}(x)\,dx=\int_0^1 y_0(x)z^{(2)}(x)\,dx=C.$$

Покажем, что функция

$$G_1 = \begin{cases} y_0(x_0)\, z^{(1)}(x) + y^{(2)}(x_0)\, z_0(x) - Cy_0(x_0)\, z_0(x), & x \leqslant x_0, \\ y_0(x_0)\, z^{(2)}(x) + y^{(1)}(x_0)\, z_0(x) - Cy_0(x_0)\, z_0(x), & x \geqslant x_0 \end{cases}$$

удовлетворяет всем указанным выше четырём условиям.

1. Выполнение условий (XX.33) очевидно, так как этим условиям удовлетворяет $z_0(x)$, а также соответственно $z^{(1)}$ при $x = 0$ и $z^{(2)}$ при $x = 1$.

2. Уравнение (XX.34) удовлетворяется в силу (XX.38). Очевидно,

$$MG_1 = y_0(x_0)\, z_0(x).$$

3. Непрерывность G_1 очевидна. Для скачка её производных имеем:

$$G'_{1x}(x_0 + 0,\ x_0) - G'_{1x}(x_0 - 0,\ x_0) =$$
$$= y_0(x_0)\,[z^{(2)\prime}(x_0) - z^{(2)\prime}(x_0)] + [y^{(1)}(x_0) - y^{(2)}(x_0)]\, z'_0(x_0) =$$
$$= y_0(x_0)\, z'_1(x_0) - y_1(x_0)\, z'_0(x_0) = \frac{1}{p(x_0)}.$$

Наконец,

$$4.\ \int_0^1 G_1(x, x_0)\, y_0(x)\, dx = -Cy_0(x_0) + y_0(x_0)\int_0^1 y_0(x)\, z^{(2)}(x)\, dx +$$
$$+ y_0(x_0)\int_0^{x_0} [z^{(1)}(x) - z^{(2)}(x)]\, y_0(x)\, dx +$$
$$+ [y^{(2)}(x_0) - y^{(1)}(x_0)]\int_0^{x_0} z_0(x)\, y_0(x)\, dx +$$
$$+ y^{(1)}(x_0)\int_0^1 y_0(x)\, z_0(x)\, dx =$$
$$= -Cy_0(x_0) + Cy_0(x_0) + y^{(1)}(x_0) - y^{(1)}(x_0) = 0.$$

Очевидно, что обобщённая функция Грина $G_1(x,\ x_0)$ как функция от переменного x_0 служит в свою очередь обобщённой функцией Грина для сопряжённого оператора Mz и граничных условий (XX.18) и (XX.21). С её помощью можно представить решение уравнения (XX.1), удовлетворяющее условиям (XX.13′), в виде

$$y(x_0) = \int_0^1 G_1(x, x_0)\, f(x)\, dx + C_1 y_0(x_0), \tag{XX.39}$$

если только $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 f(x)\, z_0(x)\, dx = 0. \tag{XX.40}$$

Из доказательства, между прочим, вытекает, что условие (XX.40) не только необходимо, но и достаточно для разрешимости уравнения (XX.1) при условии (XX.13′).

Доказательство всех этих утверждений мы проводить не будем, так как оно совершенно совпадает с тем, которое было нами проведено для самой функции Грина.

Для уравнения 2-го порядка при рассмотренных условиях однородная задача могла иметь лишь одно нетривиальное решение.

Для уравнений высших порядков может встретиться случай, когда соответствующая однородная задача имеет несколько линейно независимых решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$. Тогда обобщённая функция Грина должна соответственно удовлетворять уравнению

$$MG = \sum_{i=1} y_i(x_0)\, z_i(x),$$

и вместо одного условия (XX.36) мы будем иметь несколько подобных условий. Подробный разбор этих случаев мы проводить не будем.

Переходим к рассмотрению некоторых примеров.

§ 7. Примеры.

Пример 1. Ищем решение уравнения

$$Ly = y'' = f(x) \tag{XX.41}$$

при условиях

$$\begin{aligned} y|_{x=0} &= a_0, \\ y|_{x=1} &= a_1. \end{aligned} \tag{XX.42}$$

Единственное решение уравнения $y'' = 0$ при условии $y|_{x=0} = y|_{x=1} = 0$ есть нуль.

Согласно общей теории, изложенной выше, существует функция Грина

$$G = \begin{cases} x(x_0 - 1), & x \leqslant x_0, \\ x_0(x - 1), & x \geqslant x_0. \end{cases} \tag{XX.43}$$

Решение задачи будет:

$$y(x_0) = a_0(1 - x_0) + a_1 x_0 + \\ + (x_0 - 1)\int_0^{x_0} f(x)\, x\, dx + x_0 \int_{x_0}^{1} f(x)(x - 1)\, dx. \tag{XX.44}$$

Пример 2. Ищем решение (XX.41) при условиях

$$y'|_{x=0} = a_0, \quad y'|_{x=1} = a_1. \tag{XX.45}$$

В этом случае уравнение $y'' = 0$ имеет решение, удовлетворяющее условиям

$$y'|_{x=0} = y'|_{x=1} = 0, \tag{XX.46}$$

а именно,

$$y = 1.$$

Следовательно, функция Грина в этом случае не существует, и нам нужно будет построить обобщённую функцию Грина. Мы имеем:

$$y_0 = 1, \; z_0 = 1,$$
$$y_1 = x, \; z_1 = x.$$

Далее,

$$z^{(1)} = \frac{1}{2}x^2, \quad z^{(2)} = \frac{1}{2}(1-x)^2.$$

Тогда

$$y^{(1)} = \frac{1}{2}x^2, \quad y^{(2)} = \frac{1}{2}(1-x)^2, \quad C = \frac{1}{6}.$$

Функция G_1 будет при этом иметь вид:

$$G_1 = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(1-x_0)^2 - \frac{1}{6}, & x_0 \geqslant x, \\ \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{2}(1-x)^2 - \frac{1}{6}, & x \geqslant x_0. \end{cases} \tag{XX.47}$$

П р и м е р 3. Рассмотрим то же уравнение (XX.41) в промежутке $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ и будем считать x длиной дуги окружности единичного радиуса, отсчитанной от некоторой начальной точки. Точки, координаты которых отличаются на число, кратное 2π, тождественны.

При этом, очевидно, искомая функция y должна быть периодической функцией с периодом 2π.

Мы получим для неё условия:

$$y|_{x=2\pi} = y|_{x=0}, \quad y'|_{x=2\pi} = y'|_{x=0}. \tag{XX.48}$$

Эти условия выражают собою то обстоятельство, что функция y непрерывна со своей первой производной на окружности. Тот факт, что точка $x = 0$ играет в этих условиях особую роль, связан лишь с выбором начала отсчёта.

Теория такого рода задач не была нами развита в общем виде, но, ввиду её полного сходства с уже изложенной, мы ограничимся разбором этого примера.

Нетрудно убедиться, что однородное уравнение

$$y'' = 0$$

имеет, как и в предыдущей задаче, нетривиальное решение $y = 1$, удовлетворяющее условиям (XX.48). Следовательно, мы должны будем построить обобщённую функцию Грина.

Построение это выполняется проще всего, если воспользоваться периодичностью искомой функции, а также тем, что все точки нашей окружности эквивалентны, и поэтому функция Грина зависит только от разности $x - x_0$.

Мы можем поэтому положить сначала $x_0 = \pi$, Уравнение для функции Грина имеет вид

$$\frac{d^2G_1}{dx^2} = 0,$$

и решение его, очевидно, будет представлять собой квадратичный трёхчлен

$$G_1(x, \pi) = c_1x^2 + c_2x + c_3, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Из условия непрерывности имеем:

$$G_1(\pi - 0, \pi) - G_1(\pi + 0, \pi) = G_1(\pi, \pi) - G_1(-\pi, \pi) = 2\pi c_2,$$

откуда

$$c_2 = 0.$$

Далее, выражая условие для скачка производной, получим:

$$G_1'(\pi + 0, \pi) - G_1'(\pi - 0, \pi) = -4\pi c_1 = 1,$$

откуда

$$c_1 = -\frac{1}{4\pi}.$$

Кроме того, функция Грина должна быть ортогональна к постоянной, откуда

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^2\,dx + 2\pi c_3 = 0,$$

или

$$c_3 = \frac{\pi}{12}.$$

Окончательно имеем:

$$G_1(x, \pi) = -\frac{1}{4\pi}x^2 + \frac{\pi}{12}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant +\pi.$$

В силу периодичности $G_1(x, \pi) = G_1(x, (2k+1)\pi)$ и в общем случае:

$$G_1(x, x_0) = \begin{cases} G_1(x - x_0 + \pi, \pi) = -\frac{1}{4\pi}(x - x_0 + \pi)^2 + \frac{\pi}{12} \\ \qquad \text{при } x_0 - 2\pi \leqslant x \leqslant x_0, \\ G_1(x - x_0 - \pi, -\pi) = -\frac{1}{4\pi}(x - x_0 - \pi)^2 + \frac{\pi}{12} \\ \qquad \text{при } x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + 2\pi. \end{cases} \tag{XX.49}$$

Построенная нами функция Грина симметрична относительно x и x_0 и обладает всеми теми свойствами, которые были установлены выше для обобщённой функции Грина.

В практических задачах приходится сталкиваться со случаями, когда в уравнении (XX.1) $p(0) = 0$ или $p(1) = 0$, а иногда оба конца промежутка служат корнями функции $p(x)$. При этих условиях мы можем иногда всё же строить функцию Грина, сделав, однако, некоторые добавочные ограничения. Ограничимся разбором одного примера, который будет полезен нам в дальнейшем.

Рассмотрим уравнение

$$Ly \equiv xy'' + y' - \frac{m^2}{x} y = f(x), \tag{XX.50}$$

где m — целое число, и будем искать решение этой задачи, удовлетворяющее условию

$$y|_{x=1} = 0. \tag{XX.51}$$

Интегралы однородного уравнения

$$Ly = 0$$

суть, как нетрудно видеть,

$$y_1 = x^m, \quad y_2 = x^{-m}.$$

Один из них не ограничен в начале промежутка. Поэтому для того чтобы одна из постоянных, входящих в общее решение однородного уравнения, была определена полностью, достаточно потребовать

$$|y| \leqslant \frac{1}{x^{m-1}}.$$

Другая постоянная определится условием (XX.51). Сопряжённый оператор в данном случае совпадает с исходным:

$$Lz \equiv Mz.$$

Естественно заменить в определении функции Грина условие при $x = 0$ требованием ограниченности. При этом функция Грина для нашей задачи представляется в виде

$$G(x, x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2m} x^m (x_0^m - x_0^{-m}), & x \leqslant x_0, \\ \dfrac{1}{2m} x_0^m (x^m - x^{-m}), & x \geqslant x_0. \end{cases} \tag{XX.52}$$

Допустим, что $f(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x)| < \frac{A}{x^k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant m.$$

Применяя формулу (XX.26) к искомому решению, будем иметь:

$$y(x_0) = \frac{x_0^m - x_0^{-m}}{2m} \int_0^{x_0} x^m f(x)\, dx + \frac{x_0^m}{2m} \int_{x_0}^1 (x^m - x^{-m}) f(x)\, dx.$$

Это решение нетрудно оценить:

$$|y(x_0)| \leqslant \frac{x_0^{-m}}{2m} \int_0^{x_0} x^{m-k} A\, dx + \frac{x_0^m}{2m} \int_{x_0}^1 x^{-m-k} A\, dx + \frac{x_0^m}{2m} \int_0^1 A x^{m-k}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant A \left(\frac{x_0^{-k+1}}{2m(m-k+1)} + \frac{x_0^{-k+1}}{2m(m+k-1)} + \frac{x_0^m}{2m(m-k+1)} \right),$$

или

$$|y(x_0)| \leqslant \frac{A_1}{x_0^{k-1}}.$$

Следовательно, решение будет удовлетворять поставленным условиям, так как $k \leqslant m$.

Если $m = 0$, то решениями однородного уравнения будут

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \lg x.$$

При этом для ограниченных $f(x)$ можно искать ограниченное решение.

Для уравнений высшего порядка также возможно построение функции Грина.

Ограничимся опять одним примером.

Рассмотрим решение уравнения из примера 1 § 2 (XX) при условиях (XX.9).

Функция Грина $G(x, x_0)$ определится при этом формулами:

$$G(x, x_0) = 0, \quad x > x_0,$$
$$MG = 0, \quad x < x_0,$$

и удовлетворяет условиям:

$$G\big|_{x=x_0} = G'_x\big|_{x=x_0} = G''_{xx}\big|_{x=x_0} = \ldots = G^{(n-2)}_{xx\ldots x}\big|_{x=x_0} = 0$$
$$G^{(n-1)}_{xx\ldots x}\big|_{x=x_0-0} = -\frac{1}{p_0(x_0)}.$$

С помощью этой функции Грина решение задачи получается в виде

$$y(x_0) = \int_0^1 G(x, x_0) f(x)\, dx.$$

Слушатели могут сами проверить это непосредственно. Функция Грина, определённая этими условиями, как и прежде, отличается лишь перестановкой аргументов от функции Грина для сопряжённой задачи.

ЛЕКЦИЯ XXI.

ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА.

§ 1. Функция Грина для задачи Дирихле.

Разобрав важнейшие случаи построения функции Грина для обыкновенных уравнений, мы перейдём к изучению функции Грина для различных задач, связанных с уравнением Пуассона.

Рассмотрим в пространстве с координатами x, y, z некоторую область Ω, ограниченную достаточно гладкой поверхностью S.

Будем искать функцию u, удовлетворяющую в этой области уравнению

$$\Delta u = f(P) \tag{XXI.1}$$

и одному из следующих условий:

$$u|_S = F_0(S) \tag{XXI.2}$$

или

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = F_1(S). \tag{XXI.3}$$

Такая задача встречается, например, при отыскании потенциала электрического поля с заданным распределением зарядов.

К задаче этого типа приводится вопрос о форме равновесия мембраны, при заданной поперечной силе и т. п.

Оператор Лапласа, как мы знаем, является самосопряжённым. То же самое относится и к однородным условиям

$$u|_S = 0 \quad \text{или} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0,$$

соответствующим условиям (XXI.2) или (XXI.3), как это ясно из классической формулы Грина:

$$\iiint\limits_{\Omega} (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,d\Omega = \iint\limits_{S} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS. \tag{XXI.4}$$

Рассуждения, которые мы будем проводить, можно без труда перенести и на случай более общих условий, но мы не будем затрагивать этого вопроса.

Определение. *Назовём функцией Грина для уравнения* (XXI.1) *при условии* (XXI.2) *или функцией Грина для задачи Дирихле функцию* $G(P, P_0)$ *двух переменных точек* P *и* P_0, *удовлетворяющую следующим условиям:*

1. *Функция* $G(P, P_0)$ *есть гармоническая функция точки* P *во всей области* Ω, *исключая точку* P_0.

2. *Функция* $G(P, P_0)$ *как функция точки* P *удовлетворяет условию*

$$G(P, P_0)|_S = 0.$$

3. *В области* Ω *функция* $G(P, P_0)$ *допускает представление*

$$G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi r} + g(P, P_0),$$

где r *есть расстояние между* P *и* P_0, *а* $g(P, P_0)$ — *регулярная гармоническая функция.*

Функция $G(P, P_0)$ полностью аналогична построенной нами ранее для обыкновенного линейного уравнения функции Грина.

Мы могли бы вместо приведённого определения этой функции определить её как функцию влияния, подобно предыдущему (см. § 2 лекции XX). Однако мы не будем останавливаться на этом подробнее.

Установим существование функции Грина для задачи Дирихле.

По свойству 3

$$G(P, P_0) - \frac{1}{4\pi r} = g(P, P_0)$$

есть гармоническая функция точки P во всей области Ω:

$$\Delta g = 0. \tag{XXI.5}$$

Её предельные значения на S будут

$$g(P, P_0)|_S = -\left.\frac{1}{4\pi r}\right|_S. \tag{XXI.6}$$

Функция $g(P, P_0)$ по условиям (XXI.5) и (XXI.6) строится при помощи решения соответствующей задачи Дирихле.

Изучим ещё одно важное свойство функции Грина. Предварительно докажем одну лемму.

Лемма Ляпунова. *Рассмотрим область* Ω, *ограниченную дважды непрерывно дифференцируемой поверхностью* S. *Проведём две поверхности* S_1 *и* S_2 *на расстоянии* h *с обеих сторон от* S, *причём* $h < d$, *где* d *есть наименьший радиус кривизны поверхности* S.

Пусть функция $F(x, y, z)$ *непрерывна вместе с производными 1-го порядка в полосе, заключённой между* S_1 *и* S_2, *а вторые производные непрерывны всюду в этой полосе, кроме самой поверхности* S, *причём выражение* ΔF *ограничено.*

Тогда гармоническая внутри Ω функция, совпадающая с F на поверхности S, обладает правильной нормальной производной на S.

Для доказательства этой леммы применим формулу Грина раздельно к двум слоям, заключённым, с одной стороны, между S_1 и S, а с другой стороны — между S_2 и S. Для точки P_0, лежащей во внутреннем слое Ω_1, мы будем иметь:

$$F(P_0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S+S_1}\int\left(F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial n}\right)dS-\frac{1}{4\pi}\int\int\limits_{\Omega_1}\int\frac{1}{r}\,\Delta F\,d\Omega,$$

или

$$F(P_0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S}\int F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1}\int F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S+S_1}\int\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial n}\,dS-\frac{1}{4\pi}\int\int\limits_{\Omega_1}\int\frac{1}{r}\,\Delta F\,d\Omega.$$

Стоящие справа интегралы

$$\frac{1}{4\pi}\int\int\limits_{\Omega_1}\int\frac{1}{r}\,\Delta F\,d\Omega,\quad \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S+S_1}\int\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial n}\,dS,\quad \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1}\int F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS$$

имеют непрерывные правильные производные. Это следует из теоремы 2 лекции XV. Левая часть имеет непрерывные производные 1-го порядка вблизи S.

Следовательно, интеграл

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S}\int F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS$$

также имеет непрерывную правильную нормальную производную.

Аналогично для точки P_0, лежащей вне поверхности S, имеем:

$$0=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S+S_2}\int\left(F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial n}\right)dS-\frac{1}{4\pi}\int\int\limits_{\Omega_1}\int\frac{1}{r}\,\Delta F\,d\Omega,$$

откуда такими же рассуждениями убеждаемся, что интеграл

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S}\int F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS$$

имеет правильную нормальную производную также и вне области Ω.

На основании теоремы Ляпунова (лекция XV) мы видим, что гармоническая в Ω функция, принимающая на S значения, равные значениям функции F, имеет правильную нормальную производную, что и требовалось доказать.

Мы можем теперь установить ещё одно важное свойство функции Грина.

Теорема 1. *Если поверхность S такова, что она удовлетворяет условиям леммы Ляпунова, то функция Грина как функция точки P обладает правильной нормальной производной, когда точка P_0 лежит внутри Ω.*

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из леммы Ляпунова. Действительно, имеем

$$G = \frac{1}{4\pi r} - g.$$

Функция $\frac{1}{4\pi r}$ имеет, очевидно, правильную нормальную производную. Функция g принимает на поверхности S те же значения, что и функция $\frac{1}{4\pi r}$, которая является дважды непрерывно дифференцируемой в полосе близ S.

По лемме Ляпунова g обладает правильной нормальной производной, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Решение уравнения* (XXI.1) *при условиях* (XXI.2) (*если оно существует*) *представляется в виде:*

$$u(P_0) = \iint\limits_S F_0(S)\frac{\partial G}{\partial n}\,dS - \iiint\limits_\Omega G(P, P_0) f(P)\,dP. \qquad \text{(XXI.7)}$$

Для доказательства применим формулу Грина к области Ω', полученной из Ω вырезыванием малого шара с поверхностью σ радиуса δ вокруг точки P_0. За функции u и v возьмём неизвестное решение u уравнения (XXI.1) и функцию Грина G. В указанной области как u, так и G будут непрерывны вместе с первыми производными. Мы получим:

$$\iiint\limits_{\Omega'} G(P, P_0)\,\Delta u\,dP = \iint\limits_{S'}\left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS,$$

где S' — полная поверхность Ω'.

На поверхности σ направление нормали, внутренней по отношению к области Ω', обозначим через n'. Пусть n — направление нормали, идущей к центру шара σ. Принимая во внимание, что на S функция G обращается в нуль, получим:

$$\iiint\limits_{\Omega'} G(P, P_0) f(P)\,dP =$$

$$= \iint\limits_S F_0(S)\frac{\partial G}{\partial n}\,dS - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_\sigma\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma - \iint\limits_\sigma\left(u\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma.$$

Знак минус перед последними слагаемыми поставлен потому, что при интегрировании по σ направление нормали n противоположно направлению внутренней нормали n'.

Предел последнего интеграла при $\delta \to 0$ есть нуль в силу ограниченности u и g и их производных.

Далее,

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{4\pi} \iint_\sigma \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma =$$
$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{4\pi\delta^2} \iint_\sigma u \, d\sigma - \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{4\pi\delta^2} \iint_\sigma \delta \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

Предел первого слагаемого есть предел среднего значения u на сфере σ и равен $u(P_0)$. Предел второго слагаемого есть, очевидно, нуль. Пользуясь этим, сразу получим искомую формулу (XXI.7).

Теорема 3. *Функция $G(P, P_0)$ есть симметрическая функция своих аргументов.*

Для доказательства применим формулу Грина к функциям $G(P, P_1)$ и $G(P, P_2)$ в области Ω'', полученной вырезыванием из Ω обеих точек P_1 и P_2 малыми шарами. Обозначая через S'' границу области Ω'', мы будем иметь:

$$\iint_{S''} \left(G(P, P_1) \frac{\partial G(P, P_2)}{\partial n} - G(P, P_2) \frac{\partial G(P, P_1)}{\partial n} \right) dS'' = 0.$$

Интеграл по поверхности S равен нулю, так как там обращаются в нуль обе функции $G(P, P_1)$ и $G(P, P_2)$.

Предел интеграла по сфере вокруг P_1 будет, очевидно, равен $G(P_1, P_2)$, а предел интеграла по сфере вокруг P_2 равен $-G(P_2, P_1)$, откуда

$$G(P_1, P_2) = G(P_2, P_1),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Функция $u(P_0)$, определённая формулой* (XXI.7), *даёт решение поставленной задачи.*

Для доказательства достаточно установить существование решения, так как в силу теоремы 2 решение должно выражаться формулой (XXI.7), если оно существует. Пусть ψ есть ньютонов потенциал области Ω с плотностью $f(P)$:

$$\psi(P_0) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_\Omega \frac{f(P)}{r} dv.$$

Функция ψ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\psi = f.$$

Положим $v = u - \psi$. Если мы найдём гармоническую функцию v, удовлетворяющую условиям

$$v|_S = u|_S - \psi|_S,$$

то $u = v + \psi$ будет решением задачи. Но существование такой функции v следует из проведённого ранее исследования задачи Дирихле. Теорема 3 доказана.

Заслуживает внимания ещё одно обстоятельство. Функция Грина удовлетворяет неравенству:

$$G(P, P_0) \leqslant \frac{1}{4\pi r}.$$

Это ясно из того, что функция g отрицательна на контуре и, следовательно, отрицательна везде.

Подобно тому, как мы построили функцию Грина для задачи Дирихле в пространстве, мы могли бы построить такую же функцию на плоскости. Нам пришлось бы при этом вместо члена $\frac{1}{4\pi r}$ выделить слагаемое $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$.

Решение, очевидно, выразилось бы формулой (XXI.7), где под Ω надо, разумеется, понимать плоскую область, а под S — ограничивающую её кривую.

§ 2. Понятие о функции Грина для задачи Неймана.

При решении задачи Неймана как в пространстве, так и на плоскости мы встретились бы с тем затруднением, что функции Грина в том смысле, как мы хотели её построить, не существует, так как соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение, равное постоянной. Нам пришлось бы искать обобщённую функцию Грина, т. е. потребовать, чтобы она удовлетворяла не уравнению Лапласа, а уравнению

$$\Delta G(P, P_0) = C. \tag{XXI.8}$$

Разберём этот вопрос подробнее. Покажем, что существует решение уравнения (XXI.8), имеющее вид

$$G_1 = \frac{1}{4\pi r} + g, \tag{XXI.9}$$

где $\left.\frac{\partial G_1}{\partial n}\right|_S = 0$, а g — регулярная в области функция. Для этого достаточно показать, что при соответственно подобранной постоянной C существует функция, удовлетворяющая уравнению (XXI.8) и условию

$$\left.\frac{\partial g}{\partial n}\right|_S = -\frac{1}{4\pi}\left.\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right|_S.$$

Будем искать g в виде $g = \alpha R^2 + g_1$, где $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$, а g_1 — гармоническая функция. Для функции g_1 получим граничное условие

$$\left.\frac{\partial g_1}{\partial n}\right|_S = -\alpha \left.\frac{\partial R^2}{\partial n}\right|_S - \frac{1}{4\pi} \left.\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right|_S. \qquad \text{(XXI.10)}$$

Мы установим, что при соответствующем выборе постоянной α имеет место равенство

$$\iint_S \left[\alpha \left.\frac{\partial R^2}{\partial n}\right|_S + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right] dS = 0. \qquad \text{(XXI.11)}$$

Отсюда будет следовать существование гармонической функции, удовлетворяющей условию (XXI.10). При этом

$$\Delta g = 6\alpha = C.$$

Следовательно, отсюда будет вытекать существование функции G_1, удовлетворяющей (XXI.8) и (XXI.9). Эту функцию G_1 мы будем называть функцией Грина для задачи Неймана. Мы имеем:

$$\iint_S \alpha \frac{\partial R^2}{\partial n} dS = \alpha \iiint_\Omega \Delta (R^2)\, dS = 6\alpha m\Omega,$$

где $m\Omega$ — объём области Ω. Далее,

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = \frac{1}{4\pi} \iint_S d\omega = 1.$$

Условие (XXI.11) выполняется, если положить $\alpha = -\frac{1}{6m\Omega}$.

С помощью функции Грина G_1 можно построить решение следующей задачи: найти функцию u, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta u = f(P)$$

при условии $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$.

Необходимое и достаточное условие разрешимости этой задачи состоит в том, что

$$\iiint_\Omega f(P)\, dv = 0.$$

Если это условие выполнено, то

$$u(P_0) = \iiint_\Omega G(P, P_0) f(P)\, dv.$$

Проверить это утверждение мы предоставляем читателям.

Рассмотрим один пример.

Пример. Построим функцию Грина для задачи Неймана, поставленной для шара $R \leqslant 1$, где $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

По определению

$$G = \frac{1}{4\pi r} + g,$$

где

$$\Delta G = \text{const}. \left.\frac{\partial g}{\partial n}\right|_{R=1} = -\frac{1}{4\pi} \left.\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right|_{R=1}.$$

Для удобства предположим, что полюс функции Грина находится в точке с координатами 0, 0, z_0. Тогда $r = \sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}$,

$$\left.\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right|_{R=1} = -\left.\frac{x \cos nx + y \cos ny + (z-z_0)\cos nz}{r^3}\right|_{R=1}.$$

Но на поверхности $R=1$ имеем $\cos nx = -x$, $\cos(ny) = -y$, $\cos nz = -z$.

Отсюда

$$\left.\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right|_{R=1} = \left.\frac{1-z_0 z}{r^3}\right|_{R=1}. \qquad \text{(XXI.12)}$$

Введём ещё число $z_0' = \frac{1}{z_0}$ и функцию $r_1 = \sqrt{x^2+y^2+(z-z_0')^2}$. Очевидно,

$$\left.\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n}\right|_{R=1} = \left.\frac{1-z_0' z}{r_1^3}\right|_{R=1}.$$

Полагая в формуле (X.12) $R_0 = z_0$, $\rho = r_1$, $R=1$, имеем:

$$r|_{R=1} = z_0 r_1|_{R=1}.$$

Пользуясь этим, получим:

$$\left.\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n}\right|_{R=1} = z_0^2 \left.\frac{z_0 - z}{r^3}\right|_{R=1}, \qquad \text{(XXI.13)}$$

откуда

$$\left.\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right|_{R=1} + \frac{1}{z_0}\left.\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n}\right|_{R=1} = \left.\frac{1-2zz_0+z_0^2}{r^3}\right|_{R=1} = \left.\frac{1}{r}\right|_{R=1}.$$

Для того чтобы закончить предварительные подсчёты, рассмотрим ещё функцию

$$w = \lg(z_0' - z + r_1).$$

Докажем, что w — гармоническая функция. В самом деле,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{x}{r_1(z_0' - z + r_1)}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y}{r_1(z_0' - z + r_1)},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{-1 + \frac{z - z_0'}{r_1}}{z_0' - z + r_1} = -\frac{1}{r_1},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{(z_0' - z)(r_1^2 - x^2) + r_1^3 - 2r_1x^2}{r_1^3(z_0' - z + r_1)^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{(z_0' - z)(r_1^2 - y^2) + r_1^3 - 2r_1y^2}{r_1^3(z_0' - z + r_1)^2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{z - z_0'}{r_1^3}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{z_0' - z}{r_1^3}.$$

Отсюда следует $\Delta w = 0$.

Вычислим ещё выражение для $\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{R=1}$. Мы будем иметь:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{R=1} = \left.\frac{x\cos nx + y\cos ny - (z_0' - z + r_1)\cos nz}{r_1(z_0' - z + r_1)}\right|_{R=1} =$$

$$= -\left.\frac{[r_1^2 - (z_0' - z)^2] - z(r_1 + z_0' - z)}{r_1(z_0' - z + r_1)}\right|_{R=1} = \left.\frac{r_1 - z_0'}{r_1}\right|_{R=1} =$$

$$= -1 + \left.\frac{z_0'}{r_1}\right|_{R=1} = -1 + \left.\frac{1}{z_0 r_1}\right|_{R=1} = -1 + \left.\frac{1}{r}\right|_{R=1}. \quad \text{(XXI.14)}$$

Пользуясь (XXI.12), (XXI.13) и (XXI.14), легко проверить, что функция Грина должна иметь вид

$$G = \frac{1}{4\pi r} + \frac{1}{z_0}\frac{1}{4\pi r_1} - \frac{w}{4\pi} - \frac{R^2}{8\pi} + C,$$

где C — некоторая постоянная, определяемая из условия

$$\iiint_{R \leqslant 1} G\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Подсчёт, который мы не будем здесь проводить подробнее, даёт

$$C = -\frac{z_0^2}{8\pi} - \frac{1}{4\pi}\ln z_0.$$

В связи с этим получим окончательно:

$$G=\frac{1}{4\pi r}+\frac{1}{r_0}\frac{1}{4\pi r}-\frac{w}{4\pi}-\frac{R^2}{8\pi}-\frac{z_0^2}{8\pi}-\frac{1}{4\pi}\lg z_0.$$

Возвращаясь к обозначениям лекции XIX, получим отсюда:

$$G=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{R^2-2RR_0\cos\gamma+R_0^2}}+\frac{1}{\sqrt{R^2R_0^2-2RR_0\cos\gamma+1}}-\right.$$

$$\left.-\lg\left(1-RR_0\cos\gamma+\sqrt{R^2R_0^2-2RR_0\cos\gamma+1}\right)-\frac{R^2}{2}-\frac{R_0^2}{2}\right\}.$$

ЛЕКЦИЯ XXII.

КОРРЕКТНОСТЬ ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.

§ 1. Уравнение теплопроводности.

В тех задачах, которые мы до сих пор рассматривали, самый метод решения в большинстве случаев давал ответ на вопрос о корректности постановки той или иной задачи. Однако в некоторых других задачах удобнее прежде установить корректность непосредственно.

Рассмотрим уравнение распространения тепла в ограниченной области Ω пространства переменных (x, y, z), ограниченной поверхностью S при наличии внутренних источников тепла с плотностью $F(x, y, z)$. Пусть $u(x, y, z, t)$ — температура в точке (x, y, z) в момент времени t. Функция u удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} - F(x, y, z). \tag{XXII.1}$$

Считая приток тепла везде неотрицательным, мы будем иметь:

$$F(x, y, z) = F(P) \geqslant 0. \tag{XXII.2}$$

Пусть, кроме того, заданы следующие граничные и начальные условия:

$$u|_S = f(Q, t),$$
$$u|_{t=0} = \varphi(P), \tag{XXII.3}$$

где функции f и φ непрерывны, причем значения f при $t = 0$ на границе S совпадают со значениями φ, где Q — точка на поверхности S, а P — точка области Ω. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Во все моменты времени из любого конечного отрезка* $0 \leqslant t_0 \leqslant T$ *внутри области* Ω *справедливо неравенство*

$$u(P_0, t_0) \geqslant \inf_{\substack{P \subset \Omega,\ Q \subset S, \\ 0 \leqslant t \leqslant t_0}} \min [f(Q, t), \varphi(P)]. \tag{XXII.4}$$

Иными словами, наименьшее значение достигается функцией или при $t=0$, или на границе области Ω.

Доказательство. Предположим противное. Пусть в точке P_0 в момент времени t_0 функция u принимает значение, меньшее по сравнению со всеми остальными её значениями в области Ω при $t=0$ или на поверхности S за промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Тогда

$$u(P_0, t_0) - \inf_{\substack{P \subset \Omega,\, Q \subset S, \\ 0 \leqslant t \leqslant t_0}} \min [f(Q, t), \varphi(P)] = -\varepsilon_0 < 0.$$

Составим функцию

$$v(x, y, z, t) = u(x, y, z, t) - \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{t_0 - t}{t_0}.$$

Функция v попрежнему обладает тем свойством, что своё минимальное значение при $0 \leqslant t \leqslant t_0$ она не принимает ни при $t=0$, ни на границе области Ω. Это следует уже из того, что её значение в точке (P_0, t_0) по крайней мере на $\frac{\varepsilon_0}{2}$ меньше минимума значений $v(x, y, z, t)$ на границе и при $t=0$, ибо

$$v(P_0, t_0) = u(P_0, t_0), \quad v|_S \geqslant u|_S - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad v|_{t=0} = u|_{t=0} - \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Функция v должна принимать наименьшее значение где-то внутри четырёхмерной области $\{\Omega, 0 \leqslant t \leqslant t_0\}$ или при $t=t_0$. Теперь уже легко убедиться, что сделанное нами допущение приводит к противоречию. Если бы минимум v лежал внутри Ω при $t<t_0$, то в этой точке обращались бы в нуль первые производные от v по пространственным координатам и времени, а вторые производные

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

были бы неотрицательны. Следовательно, выражение

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

было бы также неотрицательно. С другой стороны,

$$\Delta v = \Delta u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\varepsilon_0}{2t_0},$$

$$\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\varepsilon_0}{2t} < 0.$$

Таким образом, неотрицательное число оказывается равным отрицательному. Полученное противоречие указывает на неправильность нашего предположения.

Остаётся рассмотреть случай, когда v достигает минимума при $t = t_0$. Производная $\frac{\partial v}{\partial t}$ в точке минимума, очевидно, не может быть положительной, ибо иначе при меньших значениях в той же точке функция v принимала бы меньшие значения и мы не имели бы минимума. С другой стороны, как и выше, в этой точке имеет место неравенство

$$\Delta v \geqslant 0.$$

Повторяя прежние рассуждения, приходим к абсурдному выводу, что неотрицательное выражение

$$\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t}$$

должно быть меньше нуля. Значит, этот случай также невозможен. Теорема доказана.

Меняя знак у функций u, f, φ и F, получим

Следствие 1. *Если в уравнении* (XXII.1) *функция* F *удовлетворяет неравенству*

$$F(x, y, z) \leqslant 0,$$

то функция u *достигает своего максимального значения либо при* $t = 0$, *либо на границе* S *области* Ω.

Следствие 2. *Функция* $u(x, y, z, t)$, *удовлетворяющая в области* Ω при $0 \leqslant t \leqslant T$ *однородному уравнению теплопроводности, принимает как своё максимальное, так и минимальное значение при* $t = 0$ *или на границе* S *области* Ω.

Из приведённых рассуждений вытекает единственность решения уравнения теплопроводности при условиях (XXII.3) и непрерывная зависимость этого решения от правых частей граничных и начальных условий, т. е. корректность постановки нашей краевой задачи. В самом деле, если бы мы имели два каких-либо решения задачи, то их разность, удовлетворяя однородному уравнению, обращалась бы в нуль как при $t = 0$, так и на поверхности S. Но тогда по доказанной теореме и максимум и минимум этой разности были бы равны нулю. Следовательно, и сама эта разность равнялась бы нулю. Значит, двух разных решений наша задача иметь не может.

Подобным образом устанавливается и корректность. Если разность функций, задающих начальные и краевые условия, по абсолютной величине не превосходит некоторое положительное число ε, то и разность соответствующих решений, как решение однородного уравнения теплопроводности с малыми краевыми значениями, также будет по абсолютной величине не превосходить ε.

Теорема 2. *Решение уравнения* (XXII.1) *непрерывно зависит не только от условий* (XXII.3), *но и от свободного члена уравне-*

ния (XXII.1). *Более точно: если при* $0 \leqslant t \leqslant t_0$ *значения функций* f *и* φ *меньше* $\frac{\varepsilon_0}{2}$, *а функция* F *удовлетворяет неравенству*

$$F \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2t_0},$$

то при $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_0$ *решение уравнения* (XXII.1) *удовлетворяет неравенству*

$$u < \varepsilon_0.$$

Доказательство. Допустим, что в точке (P_0, t_0) решение нашей задачи принимает значение, превосходящее ε_0. Составим функцию

$$v = u + \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{t_0 - t}{t_0}.$$

Эта функция должна иметь максимум внутри Ω при $0 < t < t_0$. Однако, составляя для неё опять выражение

$$\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t},$$

убеждаемся в том, что оно положительно везде в области Ω при $0 < t < t_0$, что противоречит условию существования максимума.

Следствие 1. *Меняя на обратный знак неравенств, относящихся к* φ, f, F, *т. е. предполагая выполненными условия*

$$\varphi > -\frac{\varepsilon_0}{2}, \quad f > -\frac{\varepsilon_0}{2}, \quad F > -\frac{\varepsilon_0}{2t_0},$$

получим для функции u *неравенство*

$$u > -\varepsilon_0.$$

Таким образом, окончательно имеем

Следствие 2. *При условиях*

$$|\varphi| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad |f| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad |F| < \frac{\varepsilon_0}{2t_0}$$

в промежутке $0 < t < t_0$ *для всех* $P \subset \Omega$ *имеет место неравенство*

$$|u| < \varepsilon_0.$$

§ 2. Понятие обобщённого решения.

Во многих задачах математической физики, с которыми мы встретимся, существование решения устанавливается лишь при значительных ограничениях на краевые условия. Мы введём одно понятие, которое позволит нам не заниматься далее этими вопросами.

Пусть мы имеем три последовательности непрерывных функций:

$$F_n, \ \varphi_n \text{ и } f_n,$$

равномерно сходящиеся соответственно к непрерывным функциям F, φ и f, и пусть уравнение

$$\Delta u_n - \frac{\partial u_n}{\partial t} = F_n$$

при условиях

$$u\,|_{t=0} = \varphi_n, \quad u\,|_S = f_n$$

имеет решение u_n (по доказанному такое решение единственно). Разность

$$u_m - u_n$$

на основании теоремы 2 (XXII) по абсолютной величине сколь угодно мала, если m и n достаточно велики. Значит, последовательность u_n равномерно сходится к функции u, удовлетворяющей нашим предельным условиям.

О сходимости производных от u мы ничего не знаем, и поэтому мы не можем утверждать, что предельная функция удовлетворяет уравнению:

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = F. \tag{XXII.5}$$

Будем называть функцию u обобщённым решением уравнения (XXII.5) при заданных начальных и предельных условиях.

Такое обобщённое решение единственно, ибо не может существовать двух таких последовательностей u_n и $u_n^{(1)}$, у которых функции f_n и $f_n^{(1)}$, φ_n и $\varphi_n^{(1)}$, F_n и $F_n^{(1)}$ стремились бы соответственно к одному пределу, а сами последовательности — к различным пределам, потому что при этом последовательность

$$u_1,\ u_1^{(1)},\ u_2,\ u_2^{(1)},\ \ldots,\ u_n,\ u_n^{(1)},\ \ldots$$

расходилась бы, что невозможно.

Вместо того, чтобы ставить задачу об отыскании истинного решения, практически достаточно решать задачу об отыскании обобщённого решения. Действительно, нам неизвестны точные величины f, φ и F. Те их значения, которые мы берём, не являются точными, а лишь мало отличаются от точных. Поэтому обобщённое решение, даже если оно не является истинным, мало будет отличаться от последнего.

Мы говорили сейчас об обобщённом решении уравнения теплопроводности. То же самое относится, однако, и к уравнению Пуассона, рассмотренному выше.

Так же, как и в случае уравнения теплопроводности, мы можем определить обобщённое решение уравнения

$$\Delta u = \rho$$

при условиях

$$u\,|_S = \varphi$$

или

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \psi,$$

как предел решений уравнений $\Delta u = \rho_n$ при условиях

$$u|_S = \varphi_n$$

или

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \psi_n,$$

если $\rho_n \to \rho$, $\varphi_n \to \varphi$, $\psi_n \to \psi$, причём сходимость равномерная.

Приведём пример существования такого обобщённого решения.

Пример 1. Пусть

$$\Delta u = \frac{x^2 - y^2}{R^2}\left[\frac{5}{\ln R} - \frac{1}{(\ln R)^2}\right], \tag{XXII.6}$$

где

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Докажем, что при $R \leqslant \frac{1}{2}$ функция

$$u_0 = (x^2 - y^2)\ln|\ln R|$$

будет обобщённым решением уравнения (XXII.6) при граничном условии

$$u|_{R=\frac{1}{2}} = u_0|_{R=\frac{1}{2}}.$$

В самом деле, положим

$$u_k = (x^2 - y^2)\ln|\ln R_k|,$$

где $R_k = \sqrt{R^2 + \delta_k}$, $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$. Вычисляя Δu_k, получим:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} = 2\ln|\ln R_k| + \frac{4x^2}{R_k^2 \ln R_k} + (x^2 - y^2)\left[\frac{1}{R_k^2 \ln R_k} - \frac{2x^2}{R_k^4 \ln R_k} - \frac{x^2}{R_k^4 (\ln R_k)^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} = -2\ln|\ln R_k| - \frac{4y^2}{R_k^2 \ln R_k} + (x^2 - y^2)\left[\frac{1}{R_k^2 \ln R_k} - \frac{2y^2}{R_k^4 \ln R_k} - \frac{y^2}{R_k^4 (\ln R_k)^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} = (x^2 - y^2)\left[\frac{1}{R_k^2 \ln R_k} - \frac{2z^2}{R_k^4 \ln R_k} - \frac{z^2}{R_k^4 (\ln R_k)^2}\right],$$

отсюда

$$\Delta u_k = \frac{x^2 - y^2}{R_k^2}\left[\frac{5}{\ln R_k} - \frac{1}{(\ln R_k)^2}\right].$$

Последовательность u_k, очевидно, равномерно сходится к функции u_0 при $k \to \infty$. Вместе с тем при $R \leqslant \frac{1}{2}$ и последовательность Δu_k равномерно сходится к правой части уравнения (XXII.6). Действительно, при $R < r$ и достаточно малом δ_k как Δu, так и функция

$$\frac{x^2-y^2}{R^2}\left[\frac{5}{\ln R}-\frac{1}{(\ln R)^2}\right]$$

будут сколь угодно малы, если r достаточно мало, а при $r \leqslant R \leqslant \frac{1}{2}$ равномерная сходимость очевидна.

Следовательно, u_0 есть обобщённое решение уравнения (XXII.6). Однако в точке (0, 0, 0) вторые производные от u_0 не имеют смысла.

Решения уравнения (XXII.6) с граничными условиями

$$u\big|_{R=\frac{1}{2}} = u_0\big|_{R=\frac{1}{2}}$$

не существует.

Если бы u было таким решением, то разность $u-u_0$ должна была бы быть функцией, гармонической везде, кроме, быть может, начала координат, везде непрерывной и на границе области должна была бы равняться нулю. Однако мы видели ранее, что непрерывная функция, гармоническая всюду, кроме, быть может, одной точки, есть гармоническая функция и в этой точке.

В силу этой теоремы разность $u-u_0$ есть гармоническая функция, равная нулю на поверхности шара, т. е. нуль. Значит, единственным возможным решением нашей задачи является функция u_0. Так как она не удовлетворяет уравнению (XXII.6) в начале координат, то наша задача вообще не имеет решения.

Взяв теперь уравнение теплопроводности с той же правой частью, что (XXII.6):

$$\Delta u-\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{x^2-y^2}{R^2}\left[\frac{5}{\ln R}-\frac{2}{(\ln R)^2}\right],$$

и опять решая его при условиях

$$u\big|_{R=\frac{1}{2}} = u_0\big|_{R=\frac{1}{2}}, \qquad u\big|_{t=0} = u_0,$$

мы не сможем найти решения этого уравнения.

Обобщённым решением будет при этом служить опять функция u_0.

Можно доказать, что непрерывная функция, удовлетворяющая однородному уравнению теплопроводности везде, кроме одной точки (x_0, y_0, z_0), при всех значениях времени, будет удовлетворять этому уравнению повсюду, включая эту точку. Пользуясь этим и повторяя рассуждения, проведённые нами при исследовании уравнения Пуассона, убеждаемся в справедливости высказанного утверждения.

§ 3. Волновое уравнение.

Займёмся теперь изучением волнового уравнения

$$\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F \tag{XXII.7}$$

и будем рассматривать его решение в области Ω, ограниченной поверхностью S при начальных условиях:

$$u|_{t=0} = \varphi(P),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(P) \tag{XXII.8}$$

и при условиях на границе:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(S). \tag{XXII.9}$$

Без всяких изменений наше рассуждение переносится и на тот случай, когда вместо (XXII.9) на границе задана сама неизвестная функция.

Относительно функции u мы будем предполагать, что она имеет непрерывные производные до 2-го порядка включительно, внутри области Ω, причём первые производные непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$.

Без ограничения общности можно всегда считать, что

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad f = 0.$$

Если бы это было не так, то, взяв вместо u новую неизвестную v по формуле

$$v = u - w,$$

где w удовлетворяет (XXII.8) и (XXII.9), мы сразу получили бы однородные условия для v.

Рассмотрим интеграл

$$K_1(t) = \int\int_\Omega\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] dx\, dy\, dz.$$

Вычисляя $\frac{dK_1(t)}{dt}$, мы получим, используя уравнение (XXII.7),

$$\frac{dK_1}{dt}=2\int\int_\Omega\int\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]dx\,dy\,dz=$$

$$=2\int\int_S\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-F\frac{\partial u}{\partial t}\right]dx\,dy\,dz=$$

$$=2\int\int_\Omega\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial z}\right)-F\frac{\partial u}{\partial t}\right]dx\,dy\,dz=$$

$$=2\int_S\int\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS-2\int\int_\Omega\int F\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dy\,dz.$$

В силу того, что по нашему предположению $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=0$, получим:

$$\frac{dK_1}{dt}=-2\int\int_\Omega\int F\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dy\,dz. \qquad \text{(XXII.10)}$$

Пользуясь известным неравенством:

$$|ab|\leqslant\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2,$$

перепишем (XXII.10) в виде

$$\frac{dK_1}{dt}\leqslant\int\int_\Omega\int F^2\,dx\,dy\,dz+\int\int_\Omega\int\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2dx\,dy\,dz$$

или, ещё усиливая неравенство:

$$\frac{dK_1}{dt}\leqslant\int\int_\Omega\int F^2\,dx\,dy\,dz+K_1.$$

Если положить

$$\int\int_\Omega\int F^2\,dx\,dy\,dz=A(t),$$

то

$$\frac{dK_1}{dt}-K_1\leqslant A(t),$$

$$\frac{d(e^{-t}K_1)}{dt}\leqslant e^{-t}A(t). \qquad \text{(XXII.11)}$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} e^{-t}K_1(t) &\leqslant K_1(0)+\int_0^t e^{-t_1}A(t_1)\,dt_1,\\ K_1(t) &\leqslant e^tK_1(0)+\int_0^t e^{t-t_1}A(t_1)\,dt_1. \end{aligned}\right\} \tag{XXII.12}$$

Отсюда сразу следует, что если только $K_1(0)=0$, то на любом фиксированном конечном промежутке изменения t величина $K_1(t)$ сколь угодно мала, коль скоро функция $A(t)$ достаточно мала.

Заметим ещё, что, положив

$$K_0(t)=\int\int_\Omega\int u^2\,dx\,dy\,dz,$$

будем иметь:

$$\frac{dK_0(t)}{dt}=2\int\int_\Omega\int u\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dy\,dz\leqslant K_0(t)+K_1(t),$$

т. е.

$$\frac{dK_0(t)}{dt}-K_0(t)\leqslant K_1(t). \tag{XXII.13}$$

Из этого неравенства, так же как и выше, следует

$$K_0(t)\leqslant e^tK_0(0)+\int_0^t e^{t-t_1}K_1(t_1)\,dt_1. \tag{XXII.14}$$

При $K_0(0)=K_1(0)=0$ вместе с $K_1(t)$ будет малой также $K_0(t)$. Из полученных оценок (XXII.12) и (XXII.14) можно вывести ряд следствий.

Теорема 3. *Пусть последовательность функций u_n удовлетворяет уравнениям*

$$\Delta u_n-\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}=F_n$$

и условиям

$$u_n\Big|_{t=0}=\frac{\partial u_n}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, \tag{XXII.15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=0, \tag{XXII.16}$$

и пусть функции F_n удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\left[\int\int_\Omega\int F_n^2\,dx\,dy\,dz\right]dt=0.$$

Тогда для всех значений t, таких, что

$$0 \leqslant t \leqslant T,$$

имеют место равенства:

$$\lim_{n \to \infty} K_0(t) = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} K_1(t) = 0.$$

Доказательство. Усиливая неравенства (XXII.12) и (XXII.14), мы получим:

$$K_1(t) \leqslant e^T \int_0^T A(t_1)\,dt_1, \tag{XXII.17}$$

$$K_0(t) \leqslant e^T \int_0^T K_1(t_1)\,dt_1 \leqslant e^{2T} \cdot T \int_0^T A(t_1)\,dt_1; \tag{XXII.18}$$

из (XXII.17) и (XXII.18) сразу следует наша теорема.

Из доказанной теоремы следует корректность поставленной задачи, если только за «меру отклонения» двух функций взять отклонение в среднем. Если мы будем сравнивать между собою два решения уравнений:

$$\Delta u_1 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = F_1 \quad \text{и} \quad \Delta u_2 - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = F_2, \tag{XXII.19}$$

при однородных условиях (XXII.15) и (XXII.16), для которых разность $F_1 - F_2$ достаточно мала, то хотя мы и не можем утверждать, что эти решения везде мало отличаются одно от другого, тем не менее разность $u_1 - u_2$ со своими производными 1-го порядка будет для любых моментов времени сколь угодно мала в среднем, т. е.

$$\int\int_\Omega\int (u_1 - u_2)^2\,dx\,dy\,dz < \varepsilon,$$

$$\int\int_\Omega\int \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz < \varepsilon.$$

Пусть требуется сравнить между собой решения двух уравнений

$$\Delta u_1 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = F_1, \quad \Delta u_2 - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = F_2 \tag{XXII.20}$$

с условиями

$$u_1\Big|_{t=0} = \varphi_1; \quad u_2\Big|_{t=0} = \varphi_2;$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi_1; \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi_2;$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_S = f_1; \quad \frac{\partial u_2}{\partial n}\Big|_S = f_2,$$

причём φ_1, φ_2 имеют непрерывные производные до 2-го порядка, а ψ_1, ψ_2, f_1, f_2 — непрерывные производные 1-го порядка. Допустим, что эти функции близки между собой в том смысле, что имеют место следующие неравенства:

$$|\varphi_1-\varphi_2|<\delta, \quad \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}\right|<\delta, \quad \left|\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_i\,\partial x_j}\right|<\delta;$$

$$|\psi_1-\psi_2|<\delta, \quad \left|\frac{\partial\psi_1}{\partial x_i}-\frac{\partial\psi_2}{\partial x_i}\right|<\delta; \quad |f_1-f_2|<\delta, \quad \left|\frac{\partial f_1}{\partial x_j}-\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\right|<\delta;$$

$$|F_1-F_2|<\delta$$

$$(x_1=x, \quad x_2=y, \quad x_3=z).$$

Легко видеть, что, приводя эти задачи к задачам с однородными условиями, мы получим опять два уравнения вида (XXII.20) с близкими правыми частями и, следовательно, решения их будут близки в среднем для любых значений t из конечного промежутка.

Так же как и для уравнения теплопроводности, легко доказать единственность решения уравнения (XXII.7) с произвольными начальными условиями (XXII.8). В самом деле, для этого достаточно доказать, что однородное уравнение с однородными условиями имеет только тривиальное решение, тождественно равное нулю. Последнее вытекает из того, что, как мы видели, интеграл квадрата для такого решения равен нулю.

Наконец, так же как и в прошлых задачах, вопрос о существовании решения представляет значительные трудности, которые, как можно показать, даже отчасти превосходят соответствующие трудности в уравнении Лапласа и уравнении теплопроводности. Избежать этих трудностей можно, введя понятие об обобщённых решениях.

§ 4. Обобщённые решения волнового уравнения.

Сделаем предварительно некоторые замечания. Рассмотрим функцию $u(x, y, z, t)$ четырёх независимых переменных — трёх координат произвольной точки из некоторой области Ω и t, интегрируемую с квадратом по x, y, z для любого значения t из некоторого промежутка. Мы будем говорить, что функция $u(x, y, z, t)$ непрерывна в среднем по переменному t в точке t_0, если, каково бы ни было положительное число ε, величина

$$\left\{\iiint\limits_{\Omega}[u(x, y, z, t_0+h)-u(x, y, z, t)]^2\,dx\,dy\,dz\right\}^{1/2}$$

может быть сделана сколь угодно малой при достаточно малом $|h|$. Функцию, непрерывную в среднем в каждой точке промежутка $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, мы будем называть непрерывной в среднем на этом промежутке. Введём одно сокращённое обозначение. Для всякой функции переменных x, y, z, заданной в области Ω и имеющей интегрируемый квадрат, величину

$$\left[\iiint_{\Omega} u^2(x, y, z)\,dx\,dy\,dz\right]^{1/2}$$

мы будем называть нормой функции u и обозначать $\|u\|$.

На основании неравенства Минковского (см. ниже, § 6)

$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|.$$

Если $\|u\| = 0$, то функция u, как показано в § 7 лекции VI, почти всюду в Ω обращается в нуль. Для любой постоянной a имеет место очевидное равенство

$$\|au\| = |a|\,\|u\|.$$

Эти свойства нормы будут нужны нам в дальнейшем. Пользуясь новым обозначением, определение непрерывности в среднем можно переформулировать следующим образом: функция $u(x, y, z, t)$ называется непрерывной в среднем в точке t_0, если каково бы ни было положительное число ε, можно указать такое положительное число $\eta(\varepsilon)$, что

$$\|u(t+h) - u(t)\| < \varepsilon$$

как только $|h| < \eta(\varepsilon)$ (аргументы x, y, z у функции u опущены для краткости).

Последовательность функций

$$u_n(x, y, z, t) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

мы будем называть равномерно сходящейся в среднем к функции $u_0(x, y, z, t)$, если неравенство

$$\|u_n - u_0\| = \left\{\iiint_{\Omega} [u_n(x, y, z, t) - u_0(x, y, z, t)]^2\,dx\,dy\,dz\right\}^{1/2} < \varepsilon$$

справедливо для всех t из заданного промежутка, как только

$$n \geqslant N(\varepsilon).$$

Справедлива следующая

Теорема 4. *Предел равномерно сходящейся в среднем последовательности функций $u_n(x, y, z, t)$, $n = 1, 2, \ldots$, каждая из которых непрерывна в среднем, есть также непрерывная в среднем функция.*

Мы докажем эту теорему точно таким же образом, каким она доказывается для обычных непрерывных функций в математическом анализе. Пусть задано положительное число ε. Выберем N столь большим, чтобы имело место неравенство

$$\|u_n(t) - u_0(t)\| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{(XXII.21)}$$

при всех t из заданного промежутка, как только $n \geqslant N$. Функция $u_n(x, y, z, t)$ по условию теоремы непрерывна в среднем в любой точке t_0. Следовательно, при $|h| < \eta$

$$\|u_n(t+h) - u_n(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad \text{(XXII.22)}$$

Из (XXII.21) и (XXII.22), пользуясь неравенством Минковского, получим

$$\|u_0(t+h) - u_0(t)\| \leqslant \|u_0(t+h) - u_n(t+h)\| + \|u_0(t) - u_n(t)\| + \\ + \|u_n(t+h) - u_n(t)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Следовательно, при указанном выборе h

$$\|u_0(t+h) - u_0(t)\| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Будем говорить, что функция u, интегрируемая со своим квадратом в некоторой области Ω, есть предел в среднем для последовательности u_n, если

$$\lim_{n\to\infty} \iiint\limits_{\Omega} (u_n - u)^2\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Мы будем называть обобщённым решением уравнения (XXII.7) *при условиях* (XXII.15) *и* (XXII.16) *функцию* u, *являющуюся пределом в среднем для последовательности функций* u_n, *удовлетворяющих уравнениям*

$$\Delta u_n - \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = F_n$$

и условиям (XXII.15) *и* (XXII.16), *где последовательность* F_n *сходится в среднем к* F.

Из оценок теоремы 3 следует важный результат: если последовательность $F_n(x, y, z, t)$ сходится в среднем равномерно по t, то и последовательность решений $u_n(x, y, z, t)$ сходится в среднем равномерно по t.

Подобно тому, как мы делали это выше (см., например, лекцию XVIII), будем считать две функции $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ эквивалентными, если

$$\iiint\limits_{\Omega} (u^{(1)} - u^{(2)})^2\, dx\, dy\, dz = 0^{1)}.$$

[1]) Как мы видели выше (теорема 21 лекции VI), при этом они могут отличаться друг от друга лишь на множестве меры нуль.

Обобщённое решение единственно, ибо последовательность u_n не может иметь двух пределов в среднем, иначе мы имели бы для этих разных пределов $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ неравенство:

$$\iiint\limits_{\Omega} (u^{(1)} - u^{(2)})^2\, dx\, dy\, dz \leqslant$$
$$\leqslant \iiint\limits_{\Omega} [(u^{(1)} - u_n) + (u_n - u^{(2)})]^2\, dx\, dy\, dz \leqslant$$
$$\leqslant 2 \iiint\limits_{\Omega} (u^{(1)} - u_n)^2\, dx\, dy\, dz + 2 \iiint\limits_{\Omega} (u^{(2)} - u_n)^2\, dx\, dy\, dz \leqslant 4\varepsilon$$

и $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ совпали бы.

Существование обобщённого решения можно установить, пользуясь одной теоремой из теории функций вещественного переменного, которая носит название теоремы Фишера-Рисса.

Эта теорема гласит:

Если последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ функций, интегралы от квадрата которых существуют, обладает тем свойством, что при достаточно больших m и n:

$$\iiint\limits_{\Omega} (u_m - u_n)^2\, dx\, dy\, dz < \varepsilon,$$

то существует предел в среднем этой последовательности, т. е. такая функция u, что

$$\lim_{n \to \infty} \iiint\limits_{\Omega} (u_n - u)^2\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Доказательство этой теоремы мы приведём в конце лекции.

Покажем, каким образом можно применить теорему Фишера-Рисса для доказательства существования обобщённых решений волнового уравнения. Пусть $u_n(x, y, z, t)$ — решения уравнения (XXII.7), удовлетворяющее условиям (XXII.15) и (XXII.16). Рассмотрим выражение

$$\| u_m(t) - u_n(t) \|.$$

Функция $v_{m,n} \equiv u_m(t) - u_n(t)$ представляет собой решение уравнения

$$\Delta v_{m,n} - \frac{\partial^2 v_{m,n}}{\partial t^2} = F_m - F_n.$$

В силу равномерной сходимости в среднем F_n к функции F мы будем иметь $\| F_m(t) - F_n(t) \| < \eta$ при достаточно больших m и n

и любом $\eta > 0$. Как мы видели, отсюда следует, что $\|v_{m,n}\| < \varepsilon$, где ε — любое положительное число. По теореме Фишера-Рисса последовательность $u_n(x, y, z, t)$ сходится в среднем равномерно к некоторой предельной функции, которая в силу теоремы 4 будет непрерывна в среднем, что и требовалось доказать.

В примерах, которые мы рассматривали в прошлых параграфах, оказывалось, что обобщённые решения уравнений Лапласа, Пуассона и уравнения теплопроводности имеют непрерывные первые производные. Мы вскоре убедимся, что это обстоятельство не является случайным.

В противоположность этим задачам обобщённые решения волнового уравнения могут уже не быть непрерывны с первыми производными. Выяснение обстоятельств, при которых это имеет место, заняло бы слишком много времени и мы не будем этим заниматься.

В заключение этого параграфа приведём один простой пример.

Пример 2. Возьмём за область Ω шар радиуса 1. Пусть $\psi(\xi)$ — некоторая функция, заданная в промежутке $-\infty < \xi < +\infty$. Рассмотрим функцию

$$u_0 = \frac{\psi(t+r) - \psi(t-r)}{r}, \tag{XXII.23}$$

где r есть расстояние от переменной точки до начала координат. При $r \neq 0$ функция u_0 имеет столько же производных, как и функция ψ. При $r = 0$ число производных, которыми обладает u_0, на единицу меньше числа производных у ψ. Это нетрудно установить дифференцированием для производных по пространственным координатам x, y, z, а для производных по времени это обстоятельство непосредственно очевидно. В самом деле,

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \frac{1}{r}\left[\psi^{(k)}(t+r) - \psi^{(k)}(t-r)\right].$$

Эта функция имеет определённый смысл при $r = 0$ только в том случае, если существует

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r}\left[\psi^{(k)}(t+r) - \psi^{(k)}(t-r)\right] = 2\psi^{(k+1)}(t).$$

Следовательно, для существования непрерывной при $r = 0$ производной $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}$ необходимо (и достаточно), чтобы существовала непрерывная производная $\psi^{(k+1)}$. Дифференцированием легко убедиться, что u_0 есть решение уравнения

$$\Delta u_0 - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0,$$

если ψ имеет непрерывные третьи производные. Пусть теперь функция ψ из формулы (XXII.23) дифференцируема один раз или не имеет вовсе производной. При этом можно установить, что u_0 всё же останется обобщённым решением.

К этой функции будет сходиться последовательность решений

$$u_n = \frac{\psi_n(r+t) - \psi_n(r-t)}{r},$$

если последовательность трижды непрерывно дифференцируемых функций ψ_n сходится к ψ.

Если в некоторой точке $\xi = t_0$ функция $\psi(\xi)$ не имеет производной, то u_0 будет терпеть разрыв в точке $r = 0$, $t = t_0$. Функция u, удовлетворяющая условиям

$$u|_S = u_0|_S, \quad u|_{t=0} = u_0|_{t=0}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0}$$

и уравнению

$$\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

при этом вообще не существует.

Действительно, если бы такое решение существовало, то по свойству непрерывной зависимости решения от начальных данных к нему должна была бы стремиться последовательность u_n, а это невозможно, так как последовательность сходится к функции u_0.

Существует ещё другой подход к обобщённым решениям, позволяющий определить их непосредственно, не прибегая к помощи предельного перехода.

Если u_n есть некоторое решение уравнения

$$Lu_n = F_n,$$

а ψ — совершенно произвольная функция, имеющая непрерывные производные до 2-го порядка и отличная от нуля лишь в некоторой внутренней части σ области Ω, то

$$\iiint_\Omega (\psi F_n - u_n M\psi)\, d\Omega = 0.$$

Внеинтегральные члены пропадают в силу того, что ψ и её производные обращаются в нуль вне σ.

В дальнейшем нам потребуется одно важное неравенство, которое носит название неравенства Буняковского. Пусть φ_1 и φ_2 — две функции n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, заданные в открытом множестве Ω. Если интегралы

$$\int\limits_\Omega \varphi_1^2\,dv \quad \text{и} \quad \int\limits_\Omega \varphi_2^2\,dv$$

существуют, то существует и интеграл

$$\int\limits_\Omega \varphi_1\varphi_2\,dv,$$

причём справедливо неравенство

$$\Big(\int\limits_\Omega \varphi_1\varphi_2\,dv\Big)^2 \leqslant \Big(\int\limits_\Omega \varphi_1^2\,dv\Big)\Big(\int\limits_\Omega \varphi_2^2\,dv\Big).$$

Это неравенство мы докажем позднее. Пользуясь неравенствами Минковского и Буняковского, получим:

$$\Big|\iiint\limits_\Omega (\psi F - uM\psi)\,d\Omega\Big| = \Big|\iiint\limits_\Omega [\psi(F-F_n) - (u-u_n)M\psi]\,d\Omega\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\iiint\limits_\Omega \psi^2\,d\Omega \iiint\limits_\Omega (F-F_n)^2\,d\Omega} +$$

$$+ \sqrt{\iiint\limits_\Omega (u-u_n)^2\,d\Omega \iiint\limits_\Omega (M\psi)^2\,d\Omega} \leqslant \varepsilon.$$

Значит, для любого обобщённого решения при любом ψ справедливо интегральное равенство:

$$\iiint\limits_\Omega uM\psi\,d\Omega = \iiint\limits_\Omega \psi F\,d\Omega. \tag{XXII.24}$$

Этим равенством можно полностью заменить дифференциальное урав нение и называть обобщённым решением уравнения

$$Lu = F$$

любую функцию, удовлетворяющую интегральному соотношению (XXII.24) при любой функции ψ, имеющей непрерывные производные до 2-го порядка и отличной от нуля только в некоторой внутренней части σ области Ω.

Если мы вспомним доказательство существования решения, для получения которого мы пользовались методом Кирхгофа, то убедимся, что формула (XXII.24) была у нас важным звеном в доказательстве. Мы доказывали, таким образом, лишь существование обобщённого решения. Уже из (XXII.24), предполагая, что u

имеет производные, и интегрируя по частям, мы выводим следующую формулу:

$$\iiint_{\Omega} \psi (Lu - F)\, d\Omega = 0, \tag{XXII.25}$$

и заключаем отсюда, что u есть решение уравнения $Lu = F$. Этот последний этап можно провести лишь, если u есть решение задачи, понимаемое в классическом смысле слова.

§ 5. Свойство обобщённых решений однородных уравнений.

Справедлива следующая общая теорема.

Теорема 5. Для уравнения Лапласа, уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ и однородного уравнения теплопроводности всякое обобщённое решение в смысле интегрального соотношения (XXII.24) обязательно дифференцируемо сколько угодно раз и является решением в обычном смысле.

Этим свойством уравнения эллиптического и параболического типов резко отличаются от уравнений гиперболического типа, для которых это обстоятельство не имеет места.

Доказательство этой теоремы мы проведём сначала для уравнения теплопроводности.

Займёмся сперва построением некоторых вспомогательных функций. Определим функцию $\Psi(\xi)$ с помощью формулы:

$$\Psi(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leqslant \frac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{1 + e^{\frac{-\xi + \frac{1}{2}}{\left(\xi - \frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}}, & \frac{1}{4} \leqslant \xi \leqslant 1, \\ 1, & \xi \geqslant 1. \end{cases}$$

Функция $\Psi(\xi)$ обладает некоторыми очевидными свойствами:

а) Она непрерывна в промежутке $0 \leqslant \xi \leqslant \infty$. В самом деле, дробь $\dfrac{-\xi + \frac{1}{2}}{\left(\xi - \frac{1}{4}\right)(1-\xi)}$ имеет своим пределом $+\infty$ при $\xi \to \frac{1}{4} + 0$ и $-\infty$ при $\xi \to 1 - 0$. Следовательно,

$$\lim_{\xi \to \frac{1}{4}} e^{\frac{-\xi + \frac{1}{2}}{\left(\xi - \frac{1}{4}\right)(1-\xi)}} = \infty, \qquad \lim_{\xi \to 1} e^{\frac{-\xi + \frac{1}{2}}{\left(\xi - \frac{1}{4}\right)(1-\xi)}} = 0,$$

откуда и следует непрерывность Ψ.

б) Функция $\Psi(\xi)$ имеет непрерывные производные всех порядков. Для того чтобы установить это, достаточно убедиться в том, что предельные значения производных любого порядка от $\Psi(\xi)$ при $\xi \to \frac{1}{4}$ или $\xi \to 1$ суть нули. Мы получим:

$$\Psi'(\xi) = \frac{-e^{\frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}}{\left[1+e^{\frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}\right]^2} \frac{d}{d\xi} \frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)} =$$

$$= \frac{\dfrac{d}{d\xi} \dfrac{\xi-\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}{\left(e^{\frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}+1\right)\left(e^{\frac{\xi-\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}+1\right)}.$$

Выражение $e^{\frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}$ стремится к бесконечности при $\xi \to \frac{1}{4}$ быстрее любой рациональной функции от ξ, а выражение $e^{\frac{\xi-\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}$ стремится к бесконечности при $\xi \to 1$ также быстрее любой рациональной функции от ξ. Следовательно,

$$\Psi'\left(\frac{1}{4}+0\right) = 0; \quad \Psi'(1-0) = 0. \qquad \text{(XXII.26)}$$

Любая производная $\Psi^m(\xi)$ будет допускать представление:

$$\Psi(\xi) = \sum_{\substack{p \geq 1 \\ q \geq 1}} \frac{R_{m,p,q}(\xi)}{\left(e^{\frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}+1\right)^p \left(e^{\frac{\xi-\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}+1\right)^q}, \qquad \text{(XXII.27)}$$

где $R_{m,p,q}(\xi)$ суть некоторые рациональные функции.

Эта формула сразу доказывается методом полной индукции. Из формулы (XXII.27) вытекает:

$$\Psi^{(m)}\left(\frac{1}{4}+0\right) = 0, \quad \Psi^{(m)}(1-0) = 0, \qquad \text{(XXII.28)}$$

что и требовалось доказать.

Введём теперь в рассмотрение функцию

$$w_n(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0,\ t_0-t)=$$
$$=\begin{cases} 0, & t_0\leqslant t,\\ \dfrac{-1}{8\pi^{3/2}(t_0-t)^{3/2}}\,e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}}\,\Psi\left(n^2(r^2+t_0-t)\right), & t<t_0,\end{cases}$$

где $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, $0\leqslant r<+\infty$.

Отметим несколько свойств функции w_n.

а) Очевидно, что

$$w_n(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0,\ t_0-t)=$$
$$=n^3w_1\left[n(x-x_0),\ n(y-y_0),\ n(z-z_0),\ n^2(t_0-t)\right]. \qquad \text{(XXII.29)}$$

б) Составим выражение:

$$\Delta w_n+\frac{\partial w_n}{\partial t}=\Phi_n(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0,\ t_0-t).$$

Тогда из формулы (XXII.29) следует:

$$\Phi_n(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0,\ t_0-t)=$$
$$=n^5\Phi_1\left[n(x-x_0),\ n(y-y_0),\ n(z-z_0),\ n^2(t_0-t)\right]. \qquad \text{(XXII.30)}$$

в) Функция Φ_n отлична от нуля лишь в области D_n:

$$\frac{1}{4n^2}\leqslant r^2+t_0-t\leqslant\frac{1}{n^2};\quad t<t_0,$$

которая стягивается в точке x_0, y_0, z_0 при $n\to\infty$. В самом деле, в области где $\Psi[n^2(r^2+t_0-t)]$ обращается в единицу, т. е. при $r^2+(t_0-t)\geqslant\frac{1}{n^2}$, мы имеем $w_n=-v$, где v есть частное решение уравнения $\Delta v+\frac{\partial v}{\partial t}=0$ (см. лекцию VIII). Значит,

$$\Delta w_n+\frac{\partial w_n}{\partial t}=0;\quad r^2+t_0-t\geqslant\frac{1}{n^2}.$$

Обращение Φ_n в нуль при $r^2+t_0-t\leqslant\frac{1}{4n^2}$ очевидно.

г) Справедлива формула:

$$\iiiint\limits_{D_n}\Phi_n\,dx\,dy\,dz\,dt=\int\limits_{t_0-\frac{1}{n^2}}^{t_0}\left[\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi_n\,dx\,dy\,dz\right]dt=1. \qquad \text{(XXII.31)}$$

В самом деле, на основании формулы Грина (XXI.4) имеем:

$$\int\limits_{t_0-\frac{1}{n^2}}^{t_0}\left[\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi_n\,dx\,dy\,dz\right]dt=\int\limits_{t_0-\frac{1}{n^2}}^{t_0}\left[\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\Delta w_n+\frac{\partial w_n}{\partial t}\right)dx\,dy\,dz\right]dt=$$
$$=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}(w_n)\Big|_{t_0-\frac{1}{n^2}}^{t_0}dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}v\Big|_{t=t_0-\frac{1}{n^2}}dx\,dy\,dz,$$

где v есть фундаментальное решение уравнения теплопроводности, определённое в лекции VIII. Последний интеграл, как показано в лемме 2 упомянутой лекции, равен единице, что и доказывает (XXII.31).

д) Пусть $f(x, y, z, t)$ — произвольная непрерывная функция в области Ω четырёх переменных x, y, z, t.

Выберем область Ω_n значений x_0, y_0, z_0, t_0 так, чтобы для точек x_0, y_0, z_0, t_0 из Ω_n область D_n лежала целиком внутри Ω.

Построим в Ω_n функцию

$$f_n(x_0, y_0, z_0, t_0) = \\ = \int\int\limits_{\Omega}\int\int \Phi_n(x-x_0, y-y_0, z-z_0, t-t_0) f(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

Тогда последовательность $f_n(x_0, y_0, z_0, t_0)$ сходится к функции $f(x_0, y_0, z_0, t_0)$, причём сходимость будет равномерной во всякой внутренней по отношению к Ω области.

Представим функцию f в виде

$$f(x, y, z, t) = f(x_0, y_0, z_0, t_0) + \eta.$$

Очевидно, что в области D_n при достаточно большом n мы будем иметь в силу непрерывности f

$$|\eta| < \varepsilon.$$

Обозначим

$$\int\limits_{-\infty}^{t_0} \left(\int \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int |\Phi_1|\, dx\, dy\, dz \right) dt = M.$$

В силу формулы (XXII.30)

$$\int\limits_{-\infty}^{t_0} \left(\int \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int |\Phi_n|\, dx\, dy\, dz \right) dt = \int\limits_{-\infty}^{t_0} \left(\int \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int |\Phi_1|\, dx\, dy\, dz \right) dt = M.$$

Мы будем иметь:

$$f_n(x_0, y_0, z_0, t_0) = \int\int\limits_{\Omega}\int\int \Phi_n f\, dx\, dy\, dz\, dt = \\ = \int\int\limits_{\Omega}\int\int \Phi_n f(x_0, y_0, z_0, t_0)\, dx\, dy\, dz\, dt + \int\int\limits_{\Omega}\int\int \Phi_n \eta\, dx\, dy\, dz\, dt = \\ = f(x_0, y_0, z_0, t_0) + \int\int\limits_{D_n}\int\int \Phi_n \eta\, dx\, dy\, dz\, dt,$$

откуда

$$|f_n(x_0, y_0, z_0, t_0) - f(x_0, y_0, z_0, t_0)| \leqslant \varepsilon M,$$

что и требовалось доказать.

е) Функция f_n, которую мы построили, будет дифференцируема неограниченно. Это свойство вытекает из неограниченной дифференцируемости Φ_n.

После этих замечаний можно уже доказать нашу теорему.

Пусть u — некоторое решение уравнения теплопроводности. Составим $u_n(x_0, y_0, z_0, t_0)$.

Тогда все $u_n(x_0, y_0, z_0, t_0)$ при любом n равны между собой и не зависят от n.

В самом деле,

$$u_n(x_0, y_0, z_0, t_0) - u_{n+p}(x_0, y_0, z_0, t_0) =$$
$$= \int\int\limits_{\Omega}\int\int u(x, y, z, t)(\Phi_n - \Phi_{n+p})\,dx\,dy\,dz\,dt =$$
$$= \int\int\limits_{\Omega}\int\int u(x, y, z, t)\left[\Delta(w_n - w_{n+p}) + \frac{\partial}{\partial t}(w_n - w_{n+p})\right]dx\,dy\,dz\,dt.$$

Но $w_n - w_{n+p} = \psi$ отлична от нуля только в области

$$\frac{1}{4(n+p)^2} \leqslant r^2 + t_0 - t \leqslant \frac{1}{n^2},$$

ибо при $r^2 + t_0 - t \geqslant \frac{1}{n^2}$ функция w_n совпадает с w_{n+p}.

Функция ψ удовлетворяет всем условиям для применимости формулы (XXII.24). Очевидно, при этом

$$M = \Delta + \frac{\partial}{\partial t},$$
$$L = \Delta - \frac{\partial}{\partial t},$$

откуда, заметив, что наше уравнение имеет вид: $Lu = 0$, т. е. $F = 0$, имеем:

$$u_n - u_{n+p} = \int\int\limits_{\Omega}\int\int \psi F\,dx\,dy\,dz\,dt = 0.$$

Отсюда следует, что $u = u_n$, но u_n имеет неограниченное число производных. Следовательно, u также дифференцируемо сколько угодно раз. Теорема доказана.

Пусть теперь функция удовлетворяет уравнению:

$$\Delta u + \lambda u = 0.$$

Положим:

$$v = e^{-\lambda t}u.$$

Тогда

$$\Delta v = e^{-\lambda t}\Delta u = -\lambda e^{-\lambda t}u.$$

Следовательно,

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Функция v на основании только что доказанного будет дифференцируема сколько угодно раз. Следовательно, тем же свойством будет обладать и функция u, что и требовалось доказать.

Можно доказать, что все решения уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ будут даже аналитическими во всей области Ω в отличие от решений уравнения теплопроводности, для которого это утверждение не имеет места.

§ 6. Неравенства Буняковского и Минковского.

Пусть $\rho(P)$ — неотрицательная функция, которую мы назовём весом.

Пусть две функции $\varphi(P)$ и $\psi(P)$, заданные в области Ω, интегрируемы с квадратом модуля с весом $\rho(P)$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_\Omega |\varphi(P)|^2\rho(P)\,dP < \infty, \\ &\int\limits_\Omega |\psi(P)|^2\rho(P)\,dP < \infty. \end{aligned}\right\} \tag{XXII.32}$$

Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\left|\int\limits_\Omega \varphi(P)\psi(P)\,\rho(P)\,dP\right|^2 \leqslant \\ \leqslant \int\limits_\Omega |\varphi(P)|^2\rho(P)\,dP \int\limits_\Omega |\psi(P)|^2\rho(P)\,dP. \tag{XXII.33}$$

Очевидно, для доказательства достаточно ограничиться случаем, когда $\psi(P)$ и $\varphi(P)$ — вещественные неотрицательные функции, ибо

$$\left|\int\limits_\Omega \varphi(P)\psi(P)\,\rho(P)\,dP\right| \leqslant \int\limits_\Omega |\varphi(P)|\,|\psi(P)|\,\rho(P)\,dP. \tag{XXII.34}$$

Каковы бы ни были неотрицательные функции φ и ψ, для них имеет место неравенство:

$$\varphi\psi \leqslant \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{2}\psi^2.$$

Следовательно, интеграл

$$\int\limits_\Omega \varphi(P)\psi(P)\,\rho(P)\,dP$$

имеет смысл.

Рассмотрим также имеющий смысл интеграл:

$$\int\limits_\Omega (\varphi - \lambda\psi)^2\rho\,dP = \int\limits_\Omega \varphi^2\rho\,dP - 2\lambda\int\limits_\Omega \varphi\psi\rho\,dP + \lambda^2\int\limits_\Omega \psi^2\rho\,dP = \\ = a\lambda^2 - 2b\lambda + c. \tag{XXII.35}$$

Парабола

$$y = a\lambda^2 - 2b\lambda + c$$

в плоскости переменных y и λ не может иметь ни одной точки ниже оси λ, так как величина (XXII.35) больше или равна нулю. Значит, уравнение

$$a\lambda^2 - 2b\lambda + c = 0$$

не может иметь различных вещественных корней, а один кратный корень может существовать у этого уравнения лишь тогда, когда существует λ_0, такое, что

$$\int_\Omega (\varphi - \lambda_0\psi)^2 \rho \, dP = 0,$$

т. е. когда выражение $(\varphi - \lambda_0\psi)\rho$ эквивалентно нулю, т. е. отлично от нуля лишь на множестве меры нуль. В случае, если весовая функция $\rho(P)$ обращается в нуль разве лишь на множестве нулевой меры, это означает, что выражение $\varphi - \lambda_0\psi$ эквивалентно нулю.

Следовательно,

$$b^2 \leqslant ac,$$

причём знак равенства может иметь место лишь в том случае, если φ и ψ пропорциональны. Тем самым неравенство Буняковского (XXII.33) доказано.

Из неравенства Буняковского очевидным образом следует для любых φ и ψ, интегрируемых вместе с их квадратами с весом ρ, неравенство:

$$\left| \int_\Omega (\varphi^2 + 2\varphi\psi + \psi^2) \rho \, dP \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Omega |\varphi|^2 \rho \, dP + \int_\Omega |\psi|^2 \rho \, dP + 2 \sqrt{\int_\Omega |\psi|^2 \rho \, dP \int_\Omega |\psi|^2 \rho \, dP} =$$

$$= \left(\sqrt{\int_\Omega |\varphi|^2 \rho \, dP} + \sqrt{\int_\Omega |\psi|^2 \rho \, dP} \right)^2,$$

или

$$\sqrt{\left| \int_\Omega (\varphi + \psi)^2 \rho \, dP \right|} \leqslant \sqrt{\int_\Omega |\varphi|^2 \rho \, dP} + \sqrt{\int_\Omega |\psi|^2 \rho \, dP}. \quad \text{(XXII.36)}$$

Неравенство (XXII.36), доказанное нами, носит название неравенства Минковского.

Так же как это имело место при доказательстве неравенства Буняковского, левая часть имеет смысл, если имеет смысл правая часть.

§ 7. Теорема Рисса-Фишера.

Теорема Рисса-Фишера. *Пусть имеется последовательность функций*

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots,$$

интегрируемых с квадратом в ограниченной области Ω. *Пусть для любого* ε *можно указать такое* $N(\varepsilon)$, *что*

$$\int_\Omega (\varphi_k - \varphi_s)^2 dv < \varepsilon, \quad \textit{если} \quad k > N(\varepsilon), \; s > N(\varepsilon). \quad \text{(XXII.37)}$$

Тогда существует такая функция φ_0, *интегрируемая с квадратом в* Ω, *что*

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega (\varphi_k-\varphi_0)^2\,dv=0. \qquad \text{(XXII.38)}$$

Очевидно, что такая функция единственна с точностью до эквивалентности, ибо, предположив существование двух таких предельных функций φ_0 и φ_*, будем иметь на основании неравенства Минковского

$$\sqrt{\int_\Omega (\varphi_0-\varphi_*)^2\,dv}\leqslant\sqrt{\int_\Omega (\varphi_0-\varphi_n)^2\,dv}+\sqrt{\int_\Omega (\varphi_n-\varphi_*)^2\,dv}<\varepsilon$$

при произвольно малом $\varepsilon>0$, откуда следует:

$$\int_\Omega (\varphi_0-\varphi_*)^2\,dv=0.$$

Мы будем говорить, что φ_0 есть предел в среднем квадратичном для последовательности φ_k. Докажем эту теорему.

Установим прежде всего, что последовательность φ_k сходится в среднем, т. е. существует суммируемая функция φ_0, такая, что

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega |\varphi_0-\varphi_k|\,dv=0.$$

С этой целью заметим, что в силу неравенства Буняковского имеем:

$$\int_\Omega |\varphi_m-\varphi_p|\,d\Omega=\int_\Omega |\varphi_m-\varphi_p|\cdot 1\,d\Omega\leqslant$$
$$\leqslant\left[\int_\Omega |\varphi_m-\varphi_p|^2\,d\Omega\right]^{1/2}\left[\int_\Omega 1\,d\Omega\right]^{1/2},$$

и, следовательно,

$$\int_\Omega |\varphi_m-\varphi_p|\,d\Omega<\eta,$$

если только $m>N(\eta)$, $p>N(\eta)$. Применяя теорему 23 лекции VI, убеждаемся в существовании суммируемой функции φ_0 — предела в среднем последовательности φ_k.

При этом из способа доказательства вытекает, что существует подпоследовательность φ_{k_i} последовательности φ_k, которая сходится к φ_0 почти всюду и притом равномерно на замкнутых множествах F_δ, на которых все функции непрерывны. Множества F_δ могут быть взяты сколь угодно близкими по мере к Ω. Мы имеем:

$$\int_{F_\delta}\varphi_0^2\,dv=\lim_{i\to\infty}\int_{F_\delta}\varphi_{k_i}^2\,dv\leqslant A<\infty,$$

откуда вытекает

$$\int_\Omega \varphi_0^2\, dv \leqslant A,$$

причём интеграл в левой части существует. Нетрудно видеть, что величина

$$\int_\Omega (\varphi_0 - \varphi_{k_i})^2\, d\Omega$$

может быть сделана сколь угодно малой при достаточно большом i. Обозначим для краткости $\psi_i = \varphi_{k_i}$. Каково бы ни было замкнутое множество F_δ и заданное положительное число ε, при достаточно большом l, зависящем, вообще говоря, от F_δ, получим:

$$\int_{F_\delta} (\varphi_0 - \psi_i)^2\, d\Omega = \int_{F_\delta} [(\psi_l - \psi_i) + (\varphi_0 - \psi_l)]^2\, d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_{F_\delta} (\psi_l - \psi_i)^2\, d\Omega + 2 \int_{F_\delta} (\varphi_0 - \psi_l)^2\, d\Omega \leqslant 2 \int_\Omega (\psi_l - \psi_i)^2\, d\Omega + \varepsilon.$$

В силу условия теоремы при достаточно больших l и i

$$\int_\Omega (\psi_l - \psi_i)^2\, d\Omega \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда

$$\int_{F_\delta} (\varphi_0 - \psi_i)^2\, d\Omega \leqslant 3\varepsilon$$

и, следовательно,

$$\int_\Omega (\varphi_0 - \psi_i)^2\, d\Omega \leqslant 3\varepsilon.$$

Докажем теперь, что φ_0 является пределом в среднем квадратичном и для первоначальной последовательности φ_k.

При s, $k_i > N(\varepsilon)$ имеем:

$$\int_\Omega (\varphi_0 - \varphi_s)^2\, d\Omega \leqslant 2 \int_\Omega (\varphi_0 - \psi_i)^2\, d\Omega + 2 \int_\Omega (\psi_i - \varphi_s)^2\, d\Omega \leqslant 6\varepsilon + 2\varepsilon = 8\varepsilon.$$

Теорема доказана.

ЛЕКЦИЯ XXIII.

МЕТОД ФУРЬЕ.

§ 1. Разделение переменных.

Краевые задачи математической физики для уравнений параболического и гиперболического типов удобно решать приёмом, который предложен Фурье и который мы будем называть разделением переменных.

Сущность этого приёма мы разберём на частных примерах. Читателю нетрудно будет, руководствуясь соображениями, изложенными в предыдущих лекциях, сразу сообразить, как и в каких случаях метод Фурье позволяет отыскивать решение задачи. Пусть разыскивается решение уравнения

$$\Delta u = \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{(XXIII.1)}$$

в области Ω пространства x, y, z, ограниченной поверхностью S, и для t, удовлетворяющего неравенству $0 \leqslant t \leqslant T$, при условиях:

$$u|_S = 0, \qquad \text{(XXIII.2)}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z). \qquad \text{(XXIII.3)}$$

Отвлечёмся пока от условия (XXIII.3) и будем искать частные решения уравнения (XXIII.1), удовлетворяющие условию (XXIII.2).

Эти решения удобно искать в виде произведения двух функций:

$$u = U(x, y, z)\, T(t). \qquad \text{(XXIII.4)}$$

Подставляя (XXIII.4) в (XXIII.1) и деля обе части на u, будем иметь:

$$\frac{\Delta U(x, y, z)}{U(x, y, z)} = \frac{1}{a} \frac{T'(t)}{T(t)}. \qquad \text{(XXIII.5)}$$

Переменные x, y, z и t в уравнении (XXIII.5) разделены, левая часть не зависит от t, а правая от x, y, z. Равенство (XXIII.5) возможно лишь при условии, если и правая и левая части равны одной и той же постоянной — λ, откуда

$$\frac{\Delta U}{U} = -\lambda, \quad \frac{1}{a}\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda, \tag{XXIII.6}$$

или

$$\Delta U + \lambda U = 0, \tag{XXIII.7}$$

$$T(t) = Ce^{-\lambda a t}. \tag{XXIII.8}$$

Для того чтобы наше решение удовлетворяло условию (XXIII.2), нужно, чтобы этому условию удовлетворяла функция $U(x, y, z)$. Значения λ, при которых уравнение (XXIII.7) имеет решение, удовлетворяющее граничному условию (XXIII.2), называются собственными значениями краевой задачи для этого уравнения при условии (XXIII.2). Далеко не всякое значение λ является собственным. В самом деле, перенося в уравнении (XXIII.7) член, содержащий λU, в правую часть и рассматривая его как свободный член, получим, применяя формулу (XXI.7):

$$U(P_0) = \frac{\lambda}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} G(P, P_0)\, U(P)\, dP, \tag{XXIII.9}$$

где $G(P, P_0)$ — функция Грина для оператора Лапласа в области Ω.

Уравнение (XXIII.9) есть линейное однородное интегральное уравнение 2-го рода типа Фредгольма с ядром, удовлетворяющим требованию § 7 лекции XVIII. Согласно четвёртой теореме Фредгольма, оно может иметь решения, отличные от нуля, лишь для некоторых дискретных значений λ. Пусть эти значения λ будут: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ и пусть

$$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$$

— соответствующие решения уравнения (XXIII.9). Тогда мы получим целый набор частных решений уравнения (XXIII 1) отыскиваемого типа:

$$u_i = U_i e^{-\lambda_i a t}.$$

Заметим, что ядро интегрального уравнения (XXI.9) является симметрической функцией координат точек P и P_0.

Мы докажем немного спустя, в теории интегральных уравнений с симметрическим ядром, что таких решений бесконечно много и что при любой функции φ, интегрируемой с квадратом, можно построить ряд

$$u = \sum_{i=1} a_i U_i e^{-\lambda_i a t}, \tag{XXIII.10}$$

который будет удовлетворять условиям (XXIII.2) и (XXIII.3) и в среднем представлять собой обобщённое решение уравнения (XXIII.1). Из теоремы 5 лекции XXII следует, что всякое обобщённое решение уравнения (XXIII.1) есть решение в обычном смысле слова. Укажем, пока без доказательства пять важных свойств системы функций $U_i(x, y, z)$ и чисел λ_i:

1. Чисел λ_i бесконечно много, все они вещественны и положительны. (В некоторых других задачах это условие заменяется тем, что среди них лишь конечное число отрицательных.)

2. Все функции U_i можно считать ортогональными и нормированными, то-есть

$$\int\int_{\Omega}\int U_i(x, y, z)\, U_j(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \begin{cases} 1, & i=j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

3. Функции U_i образуют так называемую полную систему, т. е. любая непрерывная функция $\varphi(x, y, z)$ представима рядом

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i U_i(x, y, z), \tag{XXIII.11}$$

сходящимся в среднем, где числа a_i — это так называемые коэффициенты Фурье функции φ. Если, кроме того, φ удовлетворяет условию

$$\varphi|_S = 0$$

и имеет непрерывные, включая границу, производные второго порядка, то ряд (XXIII.11) сходится равномерно.

4. Кроме условия ортонормальности, написанного выше, имеет место ещё система равенств

$$\int\int_{\Omega}\int \left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial U_i}{\partial y}\frac{\partial U_j}{\partial y} + \frac{\partial U_i}{\partial z}\frac{\partial U_j}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \begin{cases} \lambda_i, & i=j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

5. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция φ удовлетворяет граничному условию (XXIII.2), то ряд (XXIII.11) не только сходится к φ равномерно, но и ряд, полученный из него почленным дифференцированием, сходится в среднем к соответствующей производной функции φ. Иными словами, если положить

$$\varphi_N = \sum_{i=1}^{N} a_i U_i,$$

то интеграл

$$\int\int_{\Omega}\int \left\{\left[\frac{\partial(\varphi - \varphi_N)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial(\varphi - \varphi_N)}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial(\varphi - \varphi_N)}{\partial z}\right]^2\right\} dx\, dy\, dz$$

стремится к нулю.

Поставим себе задачу отыскания коэффициентов Фурье функции $\varphi(x, y, z)$. Умножая обе части (XXIII.11) на U_j и интегрируя по области Ω, получим с помощью почленного интегрирования ряда:

$$\iiint\limits_{\Omega} U_j(x, y, z)\varphi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \iiint\limits_{\Omega} U_i(x, y, z)\,U_j(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = a_j. \qquad \text{(XXIII.12)}$$

Формула (XXIII.12) и даёт нам a_j.

Для того чтобы функция, представленная рядом (XXIII.10), удовлетворяла условию (XXIII.3), естественно потребовать выполнения равенства (XXIII.11). Если сумма ряда (XXIII.10) непрерывна при $t \geqslant 0$, то условия (XXIII.2) и (XXIII.3) будут выполнены при a_j, являющихся коэффициентами Фурье функции φ.

Нетрудно установить, что ряд (XXIII.10) равномерно сходится и даёт обобщённое решение уравнения (XXIII.11). В самом деле, пусть

$$\varphi_N = \sum_{i=1}^{N} a_i U_i(x, y, z).$$

Очевидно, что

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i U_i(x, y, z)\, e^{-\lambda_i a t}$$

даёт нам решение уравнения (XXIII.1) при условиях (XXIII.2) и

$$u_N\big|_{t=0} = \varphi_N.$$

Но в прошлой лекции мы показали, что при этих условиях из сходимости последовательности φ_N вытекает, что последовательность u_N сходится равномерно во всяком конечном промежутке изменения времени к обобщённому решению u, что и требовалось доказать.

Совершенно таким же образом можно методом разделения переменных решить задачу интегрирования волнового уравнения. Пусть требуется найти решение уравнения

$$\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(XXIII.13)}$$

при начальных условиях:

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x, y, z); \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x, y, z) \qquad \text{(XXIII.14)}$$

и граничных условиях, например, вида

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{S} = 0, \qquad \text{(XXIII.15)}$$

где S — поверхность, ограничивающая объём Ω в пространстве переменных x, y, z.

Частные решения этого уравнения, удовлетворяющие условиям (XXIII.15), можно попрежнему искать в виде

$$u = U(x, y, z)\, T(t). \qquad \text{(XXIII.16)}$$

Подставляя (XXIII.16) в (XXIII.13), получим:

$$T(t)\, \Delta U(x, y, z) = U(x, y, z)\, T''(t),$$

или

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\Delta U(x, y, z)}{U(x, y, z)} = -\lambda^2,$$

откуда

$$T'' + \lambda^2 T = 0, \qquad \text{(XXIII.17)}$$

$$\Delta U + \lambda^2 U = 0. \qquad \text{(XXIII.18)}$$

Решение уравнения (XXIII.18) при условиях (XXIII.15) ищется опять при помощи функции Грина. Эта функция $G_1(P, P_0)$ в этом случае удовлетворяет не уравнению Лапласа, а уравнению

$$\Delta G_1 = -\frac{4\pi}{D},$$

где D — объём области Ω. Постоянная $-\frac{4\pi}{D}$ служит в этом случае решением сопряжённой однородной задачи, т. е.

$$\Delta\left(-\frac{4\pi}{D}\right) = 0, \qquad \frac{\partial\left(-\frac{4\pi}{D}\right)}{\partial n} = 0,$$

и подобрана так, чтобы обспечить существование функции Грина. Это вытекает из проведённого выше исследования задачи Неймана [см. § 2 лекции XXI]. G_1 будет, таким образом, обобщённой функцией Грина.

Будем искать то решение U уравнения

$$\Delta U = -\lambda^2 U,$$

которое ортогонально к постоянной по нашей области:

$$\iiint\limits_{\Omega} \lambda^2 U\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Будем решать уравнение (XXIII.18), считая $\lambda^2 U$ свободным членом. При этом то его решение, которое само ортогонально к постоянной, должно на основании результатов прошлых лекций иметь вид:

$$U(P_0) = \lambda^2 \iiint\limits_{\Omega} \frac{G_1(PP_0)}{4\pi} U(P)\, dP. \qquad \text{(XXIII.19)}$$

Мы снова получили для собственных функций задачи интегральное уравнение с симметрическим ядром.

Для этого интегрального уравнения справедливы все высказанные нами ранее утверждения, кроме 3, которое видоизменяется при этом так.

3а. Всякая функция $\varphi(P)$, имеющая непрерывные производные 2-го порядка вплоть до границы области Ω, ортогональная к постоянной:

$$\iiint_{\Omega} \frac{4\pi}{D}\varphi(P)\,dP = 0,$$

и удовлетворяющая граничным условиям, разлагается в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям уравнения (XXIII.19).

Уравнение (XXIII.17) имеет два линейно независимых решения:

$$T_1 = \cos\lambda t,$$

$$T_2 = \sin\lambda t.$$

Если $U_i(x, y, z) = U_i(P)$ — собственная функция уравнения (XXIII.19), а λ_i — его собственное значение, то искомые частные решения уравнения (XXIII.13) будут:

$$U_i(x, y, z)\cos\lambda_i t, \qquad U_i(x, y, z)\sin\lambda_i t.$$

Решение u интересующей нас задачи мы будем искать в виде ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i U_i(x, y, z)\cos\lambda_i t + \sum_{i=1}^{\infty} b_i U_i(x, y, z)\sin\lambda_i t + c_0 + c_1 t. \qquad \text{(XXIII.20)}$$

Если ряд (XXIII.20) равномерно сходится в среднем вместе с производной по времени, то u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ будут непрерывными в среднем функциями времени. Это было доказано в лекции XXII, теорема 4. Скоро мы убедимся, что условие равномерной сходимости в среднем вместе с производной по времени выполнено.

Потребуем, чтобы ряд (XXIII.20) удовлетворял начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} u\big|_{t=0} &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i U_i(x, y, z) + c_0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i U_i(x, y, z) + c_1. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXIII.21)}$$

Если выбрать коэффициенты a_i и b_i так, чтобы иметь:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i U_i(x, y, z) = \varphi_0(x, y, z) - c_0,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i U_i(x, y, z) = \varphi_1(x, y, z) - c_1,$$

то начальные условия (XXIII.14) будут выполнены в среднем. Предполагая опять систему функций U_i ортогональной и нормированной

$$\iiint_{\Omega} U_i(P)\, U_j(P)\, dP = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

можем снова определить все коэффициенты рядов (XXIII.21), подобрав сначала постоянные c_0 и c_1 так, чтобы $\varphi_0 - c_0$ и $\varphi_1 - c_1$ были ортогональны к постоянной. Повторяя прежние рассуждения, получим:

$$a_i = \iiint \varphi_0 U_i\, dP, \qquad \lambda_i b_i = \iiint_{\Omega} \varphi_1 U_i\, dP.$$

Переходим к доказательству сходимости в среднем ряда (XXIII.20). Подобно предыдущему, убеждаемся сначала, что

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i U_i \cos \lambda_i t + \sum_{i=1}^{N} b_i U_i \sin \lambda_i t$$

есть решение задачи с приближёнными начальными условиями.

Рассмотрим два конечных отрезка ряда (XXIII.20) u_n и u_m, причём пусть $n > m$. Разность этих двух отрезков

$$v_{nm} = u_n - u_m = \sum_{i=m+1}^{n} a_i U_i \cos \lambda_i t + \sum_{i=m+1}^{n} b_i U_i \sin \lambda_i t$$

удовлетворяет уравнению

$$\Delta v_{nm} - \frac{\partial^2 v_{nm}}{\partial t^2} = 0,$$

краевым условиям (XXIII.15) и начальным условиям

$$v_{nm}\big|_{t=0} = \sum_{i=m+1}^{n} a_i U_i,$$

$$\left.\frac{\partial v_{nm}}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i b_i U_i.$$

Очевидно,

$$\left\{\iiint_{\Omega} v_{nm}^2\Big|_{t=0} d\Omega\right\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon, \qquad \left\{\iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial v_{nm}}{\partial t}\Big|_{t=0}\right]^2 d\Omega\right\} < \varepsilon,$$

если только n и m достаточно велики.

Если теперь воспользоваться свойством 5 системы собственных функций, то в обозначениях предыдущей лекции имеем

$$K_0(0) < \varepsilon^2, \quad K_1(0) < \varepsilon^2, \quad A(t) \equiv 0.$$

Из неравенств (XXIII.12) и (XXIII.14) вытекает при этих условиях, что $K_0(t)$ и $K_1(t)$ также будут сколь угодно малы в любом конечном промежутке по t. Таким образом, последовательности v_{nm} и $\frac{\partial v_{nm}}{\partial t}$ удовлетворяют условию теоремы Фишера-Рисса и, значит, сходятся в среднем равномерно относительно t во всяком конечном промежутке $a \leqslant t \leqslant b$. Следовательно, ряд (XXIII.20) в среднем сходится к некоторому обобщённому решению. Мы не будем более подробно исследовать, при каких обстоятельствах это решение будет решением в обычном смысле слова.

Как мы видим, каждый член ряда (XXIII.20) представляет собой так называемое гармоническое колебание, причём частоты λ_i колебаний расположены дискретно.

§ 2. Аналогия между задачей о колебании непрерывной среды и колебаниями механических систем с конечным числом степеней свободы.

Легко проследить аналогию между рассмотренной задачей для уравнения (XXIII.13) и задачей о свободных малых колебаниях механических систем с конечным числом степеней свободы.

Эта последняя задача формулируется как задача об интегрировании системы уравнений:

$$\frac{d^2 q_j}{dt^2} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} q_k \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{XXIII.22}$$

при условиях:

$$q_j\big|_{t=0} = (q_j)_0,$$

$$\frac{dq_j}{dt}\Big|_{t=0} = (q'_j)_0,$$

причём предполагается, что $a_{ij} = a_{ji}$.

В такой системе вместо функции $u(P, t)$, зависящей от t и от переменной точки пространства, мы имеем величину, зависящую от t и от дискретного номера j. Если бы мы построили в области Ω

сетку из конечного числа точек $P_1, P_2, \ldots, P_m$ и заменили бы рассмотрение функции $u(P, t)$ рассмотрением величин $q_j = u(P_j, t)$ в конечном числе, то мы могли бы, заменив в уравнении (XXIII.13) производные по координатам конечными разностями, получить систему, аналогичную (XXIII.22).

Решение системы (XXIII.22), как мы знаем из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, имеет вид

$$q_j = \sum_{r=1}^{m} (c_{jr} \cos \lambda_r t + d_{jr} \sin \lambda_r t),$$

где λ_r — частоты колебаний, определяемые из так называемого векового уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda^2 & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda^2 & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Разница между нашей задачей и задачей отыскания решения системы (XXIII.22) состоит лишь в том, что система (XXIII.22) имеет конечное число собственных частот колебаний, в то время как задача об интегрировании волнового уравнения имеет их бесконечно много. Рассматриваемая аналогия идёт ещё глубже.

Если мы будем трактовать совокупность чисел $q_1, q_2, \ldots, q_m$ как некоторую точку в m-мерном пространстве или, точнее, как вектор q, соединяющий начало с некоторой точкой этого пространства, то система уравнений (XXIII.22) запишется в виде

$$\frac{d^2q}{dt^2} = Aq, \qquad \text{(XXIII.23)}$$

где A — линейная подстановка над вектором q. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что интегрирование (XXIII.23) сводится фактически к такой *ортогональной* замене переменных (преобразованию координат в пространстве q), чтобы матрица подстановки A была приведена к диагональной форме. Если эти новые координаты обозначить через $r_1, r_2, \ldots, r_m$, то после замены

$$q_j = \sum_{s=1}^{m} \beta_{js} r_s \qquad \text{(XXIII.24)}$$

или

$$r_s = \sum_{j=1}^{m} \beta_{sj} q_j$$

мы будем иметь систему:

$$\frac{d^2r_j}{dt^2}=\sum_{k=1}^{m}\bar{a}_{jk}r_k,$$

где

$$\bar{a}_{jk}=\begin{cases}-\lambda_j^2; & j=k,\\ 0; & j\neq k.\end{cases}$$

Рассмотрение в случае волнового уравнения собственных функций

$$U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_m$$

совершенно аналогично такому новому выбору координат. Вместо значений какой-нибудь функции $f(P,\ t)$ во всевозможных точках P мы будем считать эту функцию заданной своими коэффициентами $f_i(t)$ разложения в ряд:

$$f(P,t)=\sum_{i=1}^{\infty}f_i(t)\,U_i(P). \tag{XXIII.25}$$

Формула (XXIII.25) вместе с формулой

$$f_i(t)=\iiint\limits_{\Omega}f(P,\ t)\,U_i(P)\,dP \tag{XXIII.26}$$

аналогична (XXIII.24), только значок i в формулах (XXIII.25) и (XXIII.26), соответствующий значку s в формулах (XXIII.24), меняется не от 1 до m, а от 1 до бесконечности, а роль значка j из формул (XXIII.24), менявшегося от 1 до m, играет точка P, меняющаяся в области Ω.

Эта точка зрения даёт новый взгляд на самый метод Фурье для решения задачи об интегрировании волнового уравнения (XXIII.13) с предельными и начальными условиями.

Совпадение, отмеченное нами, разумеется, не является случайным. По существу, как одна, так и другая задачи представляют собой частные случаи некоторой общей задачи, формулируемой в терминах абстрактной теории уравнений в функциональных пространствах.

§ 3. Неоднородное уравнение.

Не углубляя вопроса, мы будем пользоваться существующей аналогией, указанной в § 2, расширяя её далее. Мы проиллюстрируем эту аналогию на задаче об интегрировании волнового уравнения со свободным членом и нулевыми начальными данными. К этой задаче, как мы видели, сводится самый общий случай.

Рассмотрим уравнение

$$\Delta u-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F$$

и попытаемся найти его решение, удовлетворяющее условиям

$$u|_{t=0}=\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=0.$$

Отыскивая u в виде ряда

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}a_i(t)U_i+c_0(t) \qquad \text{(XXIII.27)}$$

(всякая дважды дифференцируемая функция u, удовлетворяющая условию $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=0$, в такой ряд разлагается) и представляя F в виде такого же ряда[1]), получим:

$$c_0''(t)+\Delta\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i(t)U_i\right)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i(t)U_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}F_i(t)U_i+F_0(t).$$

Произведём дифференцирование под знаком суммы. Это дифференцирование законно, если допустить, что ряды из производных равномерно сходятся. Тогда мы будем иметь:

$$c_0'(t)-F_0(t)+\sum_{i=1}^{\infty}U_i\left[-\lambda_i^2a_i(t)-a_i''(t)-F_i(t)\right]=0.$$

Умножая обе части последнего равенства на U_j, интегрируя и замечая, что при этом все члены, кроме того, который имел номер j, пропадут, получим для определения $a_j(t)$ дифференциальное уравнение:

$$a_j''(t)+\lambda_j^2a_j(t)+F_j(t)=0. \qquad \text{(XXIII.28)}$$

Мы также получим

$$c_0''(t)-F_0(t)=0.$$

---

[1]) Функция F, вообще говоря, не удовлетворяет краевым условиям. Однако она, очевидно, может быть заменена функцией F', удовлетворяющей этим условиям, и такой, что $\iiint\limits_{\Omega}(F'-F)^2\,dx\,dy\,dz<\varepsilon$. На основании рассуждений предыдущей лекции такого рода замена повлечёт за собой сколь угодно малую ошибку в решении.

Пользуясь известной формулой для решения обыкновенных уравнений, имеем:

$$a_i(t) = \frac{1}{\lambda_i}\int_0^t \sin[\lambda_i(t-t_1)]\,F_i(t_1)\,dt_1,$$

$$c_0(t) = \int_0^t (t-t_1)\,F_0(t_1)\,dt_1.$$

При таких $a_i(t)$ формула (XXIII.27) даст нам искомое решение, если только ряд (XXIII.27) окажется равномерно сходящимся со своими производными до 2-го порядка. Чтобы избежать исследования сходимости, мы можем опять заменить свободный член F функцией F_N — отрезком ряда Фурье. Переходя затем к пределу, мы получим, пользуясь теоремой Рисса Фишера, если не решение в обычном смысле слова, то обобщённое решение.

Наша подстановка (XXIII.27) есть аналог замены переменных в системе (XXIII.23), приводившей эту последнюю к каноническому виду. Так же как и для (XXIII.23), она быстро решает задачу.

Очень легко указать также путь к решению задачи об интегрировании уравнения теплопроводности с правой частью и неоднородными условиями на границе:

$$\Delta u - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = F(P,\ t),$$
$$u|_S = f(S,\ t),$$
$$u_{t=0} = \varphi(P).$$

Достаточно заметить, что эта задача может быть сведена к задаче интегрирования того же уравнения при условиях

$$u|_S = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0.$$

Разложим свободный член в ряд вида

$$F(P,t) = \sum_{i=1}^{\infty} U_i(P)\,F_i(t). \qquad \text{(XXIII.29)}$$

Такое разложение возможно, так как при фиксированном значении t функция $F(P,t)$ разложима в ряд вида (XXIII.29). Коэффициенты этого ряда, вообще говоря, зависят от t:

$$F_i(t) = \iiint_{\Omega} U_i(P)\,F(P,t)\,dP. \qquad \text{(XXIII.30)}$$

$F_i(t)$ суть непрерывные дифференцируемые функции, если частная производная по t функции $F(P, t)$ непрерывна, как это видно из формулы (XXIII.30).

Отыскивая решение уравнения

$$\Delta u_N - \frac{1}{a}\frac{\partial u_N}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} F_i(t)\, U_i(P) \tag{XXIII.31}$$

в виде

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i(t)\, U_i(P),$$

получим:

$$\sum_{i=1}^{N} U_i(P)\left\{F_i(t) + \frac{1}{a}\, a_i'(t) + \lambda_i a_i(t)\right\} = 0,$$

откуда, умножая на U_j и интегрируя, видим, что коэффициенты $a_i(t)$ должны удовлетворять уравнению:

$$\frac{1}{a}\, a_i'(t) + \lambda_i a_i(t) + F_i(t) = 0. \tag{XXIII.32}$$

Взяв за $a_i(t)$ то решение (XXIII.32), которое обращается в нуль при $t=0$, т. е.

$$a_i = \int_0^t e^{a\lambda_i(t_1 - t)} F_i(t)\, dt,$$

мы увидим, что $u_N(t)$ будет удовлетворять как уравнению (XXIII.31), так и поставленным начальным и граничным условиям.

Переходя затем к пределу при $N \to \infty$ и замечая, что правая часть (XXIII.31) стремится к функции F, получим, рассуждая подобно прежнему, обобщённое решение, которое при достаточной гладкости F будет решением в обычном смысле слова [см. § 2 (XXII)].

В практических задачах часто наибольший интерес при решении волнового уравнения представляет как раз отыскание всех частот λ_i или, как говорят, спектра собственных частот колебаний. Знание такого спектра позволяет избежать неприятного явления резонанса.

Резонанс возникает большей частью тогда, когда внешняя сила изменяется по синусоидальному закону и частота её совпадает с собственной частотой колебаний.

Пусть, например, в формуле (XXIII.28)

$$F_i(t) = \sin \lambda_i t;$$

тогда

$$a_i(t)=\frac{1}{\lambda_i}\int_0^t \sin\lambda_i(t-t_1)\sin\lambda_i t_1\,dt_1=$$
$$=\frac{1}{2\lambda_i}\int_0^t [\cos\lambda_i(2t_1-t)-\cos\lambda_i t]\,dt_1=$$
$$=-\frac{t}{2\lambda_i}\cos\lambda_i t+\frac{1}{2\lambda_i^2}\sin\lambda_i t.$$

Как видно, $a_i(t)$ неограниченно растёт вместе с t.

§ 4. Продольные колебания стержня со свободными концами.

Кроме разобранных нами случаев применения метода Фурье, мы могли бы указать ещё много других. Естественно, например, изучать таким образом уравнение

$$p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+q(x)\frac{\partial u}{\partial x}+r(x)u=\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}+F(x,t),$$

или

$$p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+q(x)\frac{\partial u}{\partial x}+r(x)u=\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+F(x,t),$$

при условиях для u в момент $t=t_0$ и на концах промежутка $0\leqslant x\leqslant 1$, и ряд других.

Не вдаваясь в детали, рассмотрим один простейший пример применения изложенной теории.

Изучим решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

при условиях

$$u\Big|_{t=0}=\varphi_0(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x),\tag{XXIII.33}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1}=0.\tag{XXIII.34}$$

Эта задача возникает, например, при изучении продольных колебаний стержня, свободного по обоим концам.

Согласно изложенному методу, решение следует искать в виде ряда

$$U=\sum_{j=1}^{\infty}(a_j\cos\lambda_j t+b_j\sin\lambda_j t)\,U_j(x)+c_0+c_1 t,$$

где $U_j(x)$ суть решения дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2U_j}{dx^2}+\lambda_j^2U_j=0. \tag{XXIII.35}$$

В нашем случае нет надобности прибегать к помощи интегрального уравнения для отыскания решения уравнения (XXIII.35), удовлетворяющего граничным условиям:

$$\left.\frac{dU_j}{dx}\right|_{x=0}=0 \quad \text{и} \quad \left.\frac{dU_j}{dx}\right|_{x=1}=0.$$

Общее решение уравнения (XXIII.35) будет:

$$U_j=c_j\cos\lambda_jx+d_j\sin\lambda_jx,$$

если $\lambda_j^2>0$, или

$$U_j=c_j\operatorname{ch}i\lambda_jx+d_j\operatorname{sh}i\lambda_jx,$$

если $\lambda_j^2<0$.

В указанных случаях

$$\frac{dU_j}{dx}=\lambda_j(-c_j\sin\lambda_jx+d_j\cos\lambda_jx),$$

$$\frac{dU_j}{dx}=\lambda_j(c_j\operatorname{sh}i\lambda_jx+d_j\operatorname{ch}i\lambda_jx).$$

Первое из граничных условий заставляет считать $d_j=0$ в обоих случаях, а второе условие приводит к заключению, что мнимые значения λ_j (т. е. отрицательные для λ_j^2) невозможны.

Таким образом,

$$U_j=c_j\cos\lambda_jx,\quad \frac{dU_j}{dx}=-\lambda_jc_j\sin\lambda_jx.$$

Пользуясь вторым граничным условием, заключаем, что

$$\sin\lambda_j=0,$$

откуда

$$\lambda_j=j\pi$$

и

$$U_j=c_j\sin j\pi x.$$

Известны формулы:

$$\int_0^1\cos j\pi x\cos k\pi x\,dx=\begin{cases}\frac{1}{2}, & j=k;\\ 0, & j\neq k.\end{cases}$$

Если выбрать теперь $c_j=\sqrt{2}$, то мы получим искомую систему ортогональных нормированных функций U_j в виде

$$U_j=\sqrt{2}\cos j\pi x.$$

Коэффициенты a_j и b_j получим в виде

$$a_j = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi_0(x)\cos j\pi x\,dx,$$

$$b_j = \frac{\sqrt{2}}{\pi j}\int_0^1 \varphi_1(x)\cos j\pi x\,dx,$$

и окончательный ответ в виде ряда

$$u = \sqrt{2}\sum_{j=1}^{\infty} a_j\cos j\pi x + b_j\sin j\pi x + c_0 + c_1 t,$$

где

$$c_0 = \int_0^1 \varphi_0(x)\,dx, \quad c_1 = \int_0^1 \varphi_1(x)\,dx.$$

Как мы видим, частоты собственных колебаний такого стержня будут иметь вид

$$\pi j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

Для того чтобы закончить изложение метода Фурье, мы сделаем ещё несколько замечаний общего характера. В наших рассуждениях существенную роль играло то обстоятельство, что числа λ_j не сгущались нигде. Поэтому в формулах (XXIII.25) и (XXIII.26), которые мы рассматривали как аналог линейных преобразований n чисел, одно из переменных — значок i — принимал лишь счётное множество значений. Как выясняется при детальном исследовании, это обстоятельство тесно связано с фактом ограниченности области Ω. Те свойства интегральных уравнений с симметрическим ядром, на которые мы опирались, могут потеряться, если область будет неограниченной.

При этом может случиться, например, что таких ортогональных нормированных собственных функций не существует. Они заменяются при этом целым множеством функций $U(P, \xi)$, зависящим от непрерывно меняющегося параметра ξ. Если задача несамосопряжённая, то множество собственных значений λ может быть не только вещественным, но и комплексным.

ЛЕКЦИЯ XXIV.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ СИММЕТРИЧЕСКИМ ЯДРОМ.

§ 1. Простейшие свойства. Вполне непрерывные операторы.

Мы видели выше, что задача об отыскании собственных значений и собственных функций для многих задач математической физики приводится, при помощи функции Грина, к задаче о собственных значениях и собственных функциях некоторого интегрального уравнения типа Фредгольма 2-го рода с вещественным симметрическим ядром, т. е. таким ядром, что

$$K(P, P_0) = K(P_0, P).$$

Мы будем изучать несколько более общее интегральное уравнение, а именно:

$$\varphi(P_0) = f(P_0) + \lambda \int_{\Omega} K(P_0, P)\, \varphi(P)\, \rho(P)\, dP, \qquad \text{(XXIV.1)}$$

и соответствующее однородное уравнение:

$$\varphi(P_0) = \lambda \int_{\Omega} K(P_0, P)\, \varphi(P)\, \rho(P)\, dP, \qquad \text{(XXIV.2)}$$

где $K(P_0, P)$ — симметрическая функция координат точек P_0 и P, а $\rho(P)$ — неотрицательная измеримая функция, называемая весом (или нагрузкой).

В случае $\rho = 1$ мы получаем интегральные уравнения с симметрическим ядром.

Для рассматриваемых интегральных уравнений и, в частности, для интегральных уравнений с симметрическим ядром имеет место целый ряд важных предложений, к изучению которых мы и перейдём.

Мы будем говорить, что уравнение (XXIV.1) имеет *нагруженное симметрическое ядро* или *симметрическое ядро с нагрузкой* $\rho(P)$.

Для того чтобы не затруднять изложение, мы ограничимся тем случаем, когда функция $\rho(P)$ ограничена.

Мы предположим, кроме того, что функция $\rho(P)$ обращается в нуль только на множестве меры нуль.

Лемма 1. *Пусть $\varphi(P)$ и $\psi(P_0)$ — две произвольные функции, вещественные или комплексные* [1], *интегрируемые с квадратом модуля с весом $\rho(P)$ в ограниченной области Ω, т. е.*

$$\int_\Omega |\varphi(P)|^2 \rho(P)\, dP < \infty, \quad \int_\Omega |\psi(P_0)|^2 \rho(P_0)\, dP_0 < \infty.$$

Далее, пусть вещественное ядро [2] $K(P, P_0)$ *удовлетворяет неравенству:*

$$|K(P, P_0)| \leqslant \frac{A}{r^\alpha},$$

где r — расстояние между точками P и P_0, а $\alpha < n$. Тогда интеграл

$$\int_\Omega \int_\Omega |K(P, P_0)\varphi(P)\psi(P_0)|\rho(P)\rho(P_0)\, dP\, dP_0 \qquad \text{(XXIV.3)}$$

сходится.

Оценивая интеграл (XXIV.3) при помощи неравенства Буняковского, получим:

$$\int_\Omega \int_\Omega |K(P, P_0)\varphi(P)\psi(P_0)|\rho(P)\rho(P_0)\, dP\, dP_0 \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_\Omega |\varphi(P)|^2 \rho(P)\, dP} \sqrt{\int_\Omega \left\{\int_\Omega |K(P, P_0)\psi(P_0)|\rho(P_0)\, dP_0\right\}^2 \rho(P)\, dP}.$$

Если мы установим существование интеграла

$$\int_\Omega |K(P, P_0)\psi(P_0)|\rho(P_0)\, dP_0 \qquad (*)$$

для почти всех P, а также сходимость интеграла:

$$\int_\Omega \left\{\int_\Omega |K(P, P_0)\psi(P_0)|\rho(P_0)\, dP_0\right\}^2 \rho(P)\, dP, \qquad \text{(XXIV.4)}$$

то отсюда будет вытекать наша лемма.

---

[1] Под комплексной функцией вещественного аргумента (или вещественных аргументов) $\varphi(P)$ мы понимаем функцию, представимую так:

$$\varphi(P) = \varphi_1(P) + i\varphi_2(P),$$

где $\varphi_1(P)$ и $\varphi_2(P)$ — вещественные функции.

[2] Ядро $K(P, P_0)$ не предполагается симметричным.

Имеем:

$$\int_{\Omega} |K(P, P_0)\psi(P_0)|\rho(P_0)dP_0 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Omega} \frac{A}{r^{\alpha}}|\psi(P_0)|\rho(P_0)dP_0 = A\int_{\Omega} \frac{1}{r^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{r^{\frac{\alpha}{2}}}|\psi(P_0)|\rho(P_0)dP_0 \leqslant$$

$$\leqslant A\sqrt{\int_{\Omega} \frac{\rho(P_0)}{r^{\alpha}}dP_0}\sqrt{\int_{\Omega} \frac{1}{r^{\alpha}}|\psi(P_0)|^2\rho(P_0)dP_0},$$

но

$$A^2\int_{\Omega} \frac{\rho(P_0)\,dP_0}{r^{\alpha}} \leqslant M, \tag{**}$$

где M — некоторая постоянная.

Следовательно, интеграл (*) существует для всех тех точек P, для которых существует интеграл

$$\int_{\Omega} \frac{1}{r^{\alpha}}|\psi(P_0)|^2\rho(P_0)\,dP_0. \tag{XXIV.5}$$

Таким образом,

$$\int_{\Omega}\left[\int_{\Omega} |K(P, P_0)\psi(P_0)|\rho(P_0)\,dP_0\right]^2\rho(P)\,dP \leqslant$$

$$\leqslant M\int_{\Omega}\left[\int_{\Omega}\frac{1}{r^{\alpha}}|\psi(P_0)|^2\rho(P_0)\,dP_0\right]\rho(P)\,dP.$$

Мы установим одновремённо и существование почти везде интеграла (XXIV.5) и сходимость интеграла в правой части последнего неравенства, пользуясь теоремой Лебега-Фубини.

Докажем сходимость $2n$-мерного интеграла

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{1}{\rho^{\alpha}}|\psi(P_0)|^2\rho(P_0)\rho(P)\,dP_0dP. \tag{XXIV.6}$$

Отсюда будет следовать, что кратный интеграл:

$$\int_{\Omega}\left[\int_{\Omega}\frac{1}{r^{\alpha}}|\psi(P_0)|^2\rho(P_0)\,dP_0\right]\rho(P)\,dP$$

будет иметь смысл и будет сходящимся, так же как и интеграл (XXIV.4)

Чтобы установить сходимость интеграла (XXIV.6), будем совершать интегрирование в другом порядке:

$$\int_{\Omega}\left[|\psi(P_0)|^2\rho(P_0)\int_{\Omega}\frac{1}{r^{\alpha}}\rho(P)\,dP\right]dP_0. \tag{XXIV.7}$$

В силу (**) подинтегральная функция меньше, чем

$$B\,|\psi(P_0)|^2\rho(P_0),$$

где B — постоянная; следовательно, интеграл (XXIV.7) меньше, чем

$$B\int_\Omega |\psi(P_0)|^2\rho(P_0)\,dP_0,$$

который сходится по условию леммы; значит, сходится и интеграл (XXIV.6); лемма доказана.

Следствие. *Справедливо равенство*

$$\int_\Omega \varphi(P)\left\{\int_\Omega K(P,\ P_0)\psi(P_0)\rho(P_0)\,dP_0\right\}\rho(P)\,dP =$$
$$= \int_\Omega \psi(P_0)\left\{\int_\Omega K(P,\ P_0)\varphi(P)\rho(P)\,dP\right\}\rho(P_0)\,dP_0.$$

Доказательство следует из добавления к теореме Лебега-Фубини (см. лекцию VI).

Введём следующие обозначения:

$$\int_\Omega K(P_0, P)\varphi(P)\rho(P)\,dP = A\varphi, \tag{XXIV.8}$$

$$\int_\Omega K(P_0, P)\psi(P_0)\rho(P_0)\,dP_0 = A^*\psi. \tag{XXIV.9}$$

Из доказанного выше следует, что существуют интегралы

$$\int_\Omega |A\varphi|^2\rho(P)\,dP, \qquad \int_\Omega |A^*\psi|^2(P)\,dP.$$

Заметим, что в случае симметричности функции $K(P_0,\ P)$ оператор A совпадает с оператором A^*. Пусть также

$$(\varphi,\ \psi) = \int_\Omega \varphi(P)\overline{\psi(P)}\rho(P)\,dP, \tag{XXIV.10}$$

где $\overline{\psi}$ обозначает комплексно сопряжённую функцию с ψ.

Будем называть выражение $(\varphi,\ \psi)$ скалярным произведением функции φ и ψ.

Отметим некоторые свойства этих символов:

1. $A(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1A\varphi_1 + a_2A\varphi_2$.
2. $(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2, \psi) = a_1(\varphi_1,\ \psi) + a_2(\varphi_2,\ \psi)$.
3. $(\varphi,\ a_1\psi_1 + a_2\psi_2) = \overline{a}_1(\varphi,\ \psi_1) + \overline{a}_2(\varphi,\ \psi_2)$.
4. $(\varphi,\ \psi) = \overline{(\psi,\ \varphi)}$.
5. Для любой интегрируемой с квадратом функции φ

$$(\varphi,\ \varphi) \geqslant 0,$$

причём знак равенства имеет место в том и только в том случае, если функция φ эквивалентна нулю.

В равенствах 1, 2, 3 a_1 и a_2 — некоторые постоянные. Справедливость всех наших равенств устанавливается непосредственной проверкой.

Наше следствие может быть записано в форме

$$(\varphi, \overline{A^*\psi}) = (A\varphi, \bar{\psi}). \tag{XXIV.11}$$

Для случая вещественной и симметрической функции $K(P, P_0)$ и вещественных φ и ψ будем иметь $(\varphi, A\psi) = (A\varphi, \psi)$.

Переходим к изучению интегральных уравнений. Изучим прежде всего однородные уравнения.

Условимся в дальнейшем рассматривать только такие собственные функции, у которых квадрат модуля интегрируем с весом ρ.

Теорема 1. *Если λ_1 и λ_2 суть два различных характеристических числа уравнений*

$$\varphi = \lambda_1 A\varphi$$

и

$$\psi = \lambda_2 A^*\psi,$$

то собственные функции этих уравнений φ и ψ удовлетворяют соотношению

$$(\varphi, \bar{\psi}) = 0. \tag{XXIV.12}$$

В самом деле,

$$(\varphi, \overline{A^*\psi}) = \left(\varphi, \overline{\frac{1}{\lambda_2}\psi}\right) = \frac{1}{\lambda_2}(\varphi, \bar{\psi}),$$

$$(A\varphi, \bar{\psi}) = \left(\frac{1}{\lambda_1}\varphi, \bar{\psi}\right) = \frac{1}{\lambda_1}(\varphi, \bar{\psi});$$

из (XXIV.11) следует при этом

$$\lambda_2(\varphi, \bar{\psi}) = \lambda_1(\varphi, \bar{\psi}),$$

что возможно лишь, если $(\varphi, \bar{\psi}) = 0$, что и требовалось доказать.

Функции φ и ψ, удовлетворяющие (XXIV.12), мы будем называть ортогональными с весом $\rho(P)$ или, когда это не поведёт к недоразумениям, ортогональными.

Следствие. *Фундаментальные функции интегрального уравнения с нагруженным симметрическим ядром, соответствующие разным характеристическим числам, ортогональны.*

В самом деле, для симметрического ядра с нагрузкой все фундаментальные функции уравнения $\psi = \lambda A^*\psi$ просто превращаются в фундаментальные функции уравнения $\varphi = \lambda A\varphi$, ибо $A \equiv A^*$.

Теорема 2. *Вещественное нагруженное симметрическое ядро не может иметь комплексных характеристических чисел.*

Доказательство. Пусть наше уравнение имеет характеристическое число λ_0 и фундаментальную функцию φ_0, т. е.

$$\varphi_0 = \lambda_0 A \varphi_0.$$

Взяв сопряжённые комплексные величины от обеих частей нашего уравнения и обращая внимание на то, что для вещественного ядра $K(P, P_0)$

$$\overline{A\varphi} = A\overline{\varphi},$$

получим:

$$\overline{\varphi}_0 = \overline{\lambda}_0 A \overline{\varphi}_0.$$

Отсюда следует, что $\overline{\lambda}_0$ и $\overline{\varphi}_0$ суть также характеристическое число и фундаментальная функция нашего уравнения.

Поскольку $\lambda_0 \neq \overline{\lambda}_0$, на основании следствия из теоремы 1 видим, что φ_0 и $\overline{\varphi}_0$ должны быть ортогональны с весом ρ, т. е.

$$(\varphi_0, \overline{\varphi}_0) = \int\limits_\Omega \varphi_0(P)\overline{\overline{\varphi}_0(P)}\rho(P)\,dP = \int\limits_\Omega |\varphi_0(P)|^2 \rho(P)\,dP = 0;$$

значит, $\varphi_0 = 0$, что и противоречит предположению о том, что φ_0 есть нетривиальное решение уравнения:

$$\varphi = \lambda A \varphi.$$

Теорема 3. *Все фундаментальные функции вещественного симметрического ядра сами вещественны (точнее говоря, могут быть выбраны вещественными).*

Пусть

$$\varphi_0(P) = \alpha(P) + i\beta(P)$$

— фундаментальная функция. Подставляя её в уравнение, получим:

$$\varphi_0 = \alpha + i\beta = \lambda A \varphi_0 = \lambda A \alpha + i\lambda A \beta;$$

разделяя вещественную и мнимую части, получим:

$$\alpha = \lambda A \alpha, \quad \beta = \lambda A \beta.$$

Следовательно, α и β суть сами фундаментальные функции, и вместо φ_0 можно рассматривать именно обе эти функции; линейной комбинацией их будет наша функция φ_0.

Лемма 2. *Все фундаментальные функции нагруженного симметрического ядра можно считать ортогональными с весом ρ.*

Заметим, что для уравнения с симметрическим ядром описанного вида вся теория Фредгольма, очевидно, справедлива, ибо интегралы

$$\int\limits_\Omega |K(P, P_0)|\rho(P_0)\,dP_0, \quad \int\limits_\Omega |K(P, P_0)|\rho(P_0)\,dP$$

ограничены. В частности, каждому собственному значению λ отвечает лишь конечное число линейно независимых функций.

Перейдём к доказательству леммы. В самом деле, неортогональными могли бы быть лишь фундаментальные функции, соответствующие одному и тому же характеристическому числу λ. Пусть эти функции будут, например, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$. Вместо них мы рассмотрим их линейные комбинации:

$$\psi_1 = \varphi_1,$$

$$\psi_2 = \varphi_2 - \frac{(\psi_1, \overline{\varphi}_2)}{(\psi_1, \overline{\psi}_1)} \psi_1,$$

$$\psi_3 = \varphi_3 - \frac{(\psi_1, \overline{\varphi}_3)}{(\psi_1, \overline{\psi}_1)} \psi_1 - \frac{(\psi_2, \overline{\varphi}_3)}{(\psi_2, \overline{\psi}_2)} \psi_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_k = \varphi_k - \frac{(\psi_1, \overline{\varphi}_k)}{(\psi_1, \overline{\psi}_1)} \psi_1 - \frac{(\psi_2, \overline{\varphi}_k)}{(\psi_2, \overline{\psi}_2)} \psi_2 - \ldots - \frac{(\psi_{k-1}, \overline{\varphi}_k)}{(\psi_{k-1}, \overline{\psi}_{k-1})} \psi_{k-1}.$$

Методом полной индукции легко доказать, что каждая функция ψ_s ортогональна ко всем предыдущим, так как

$$(\psi_s, \overline{\psi}_t) = (\varphi_s, \overline{\psi}_t) - \frac{(\psi_1, \overline{\varphi}_s)}{(\psi_1, \overline{\psi}_1)} (\psi_1, \overline{\psi}_t) - \ldots - \frac{(\psi_{s-1}, \overline{\varphi}_s)}{(\psi_{s-1}, \overline{\psi}_{s-1})} (\psi_{s-1}, \overline{\psi}_t).$$

В правой части все слагаемые нули по предположению индукции, ибо $t < s$, кроме $(\varphi_s, \overline{\psi}_t)$ и $-\frac{(\psi_t, \overline{\varphi}_s)}{(\psi_t, \overline{\psi}_t)} (\psi_t, \overline{\psi}_t)$, которые взаимно уничтожаются. Очевидно, ψ_k являются решениями однородного уравнения, что и требовалось доказать.

Определение. *Мы будем говорить, что последовательность $\{\varphi_n\}$ функций, с интегрируемым квадратом модуля, сходится в среднем с весом ρ к функции φ с интегрируемым квадратом модуля, если справедливо соотношение*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} |\varphi_n - \varphi|^2 \rho \, dP = 0.$$

Заметим, что если последовательность $\{\varphi_n\}$ функций с интегрируемым квадратом равномерно сходится к φ, то эта последовательность сходится в среднем к φ. Однако обратное предложение, очевидно, не имеет места. Если отказаться от требования равномерной сходимости, то можно построить примеры всюду сходящихся последовательностей, которые в среднем не сходятся.

В лекции XXII, § 7 мы встречались уже с понятием сходимости в среднем и доказали, что одна последовательность не может сходиться в среднем к двум различным функциям. Здесь мы напомним еще раз, что если предполагать интегрируемость в смысле Лебега, то в упомянутом предложении следует считать различными только функции, значения которых различны на множестве положительной меры.

Определение. *Назовём некоторое множество функций компактным, если из любой его бесконечной части можно выбрать сходящуюся последовательность.*

При разных требованиях, наложенных на сходимость, которая может быть сходимостью в среднем или равномерной сходимостью и т. п., мы получим и разные условия компактности.

Компактные множества функций по своему определению весьма близко напоминают ограниченные множества точек. Ясно, что любая бесконечная часть ограниченного множества точек сама есть ограниченное бесконечное множество и поэтому имеет хоть одну предельную точку, а значит, и последовательность, сходящуюся к этой точке.

В курсе математического анализа вводится понятие равностепенной непрерывности множества функций. Напомним определение этого понятия.

Множество функций $\{\varphi\}$ *называется равностепенно непрерывным, если для любого положительного* ε *можно указать такое число* $\eta(\varepsilon)$, *что неравенство*

$$|\varphi(P)-\varphi(P_1)|<\varepsilon$$

имеет место, как только расстояние между точками p *и* p_1 *меньше* $\eta(\varepsilon)$, *одновремённо для всех функций, принадлежащих множеству* $\{\varphi\}$.

Одним из важнейших применений понятия равностепенной непрерывности является так называемая теорема Арцела[1]). Эта теорема гласит: *если некоторое множество функций* $\{\varphi\}$ *равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, то из него можно выделить равномерно сходящуюся последовательность.* (Равномерно ограниченным называется множество функций, удовлетворяющих неравенству $|\varphi|<A$, где A не зависит от φ.)

Пользуясь понятием компактности, мы можем сформулировать этот результат так:

Множество, состоящее из равномерно ограниченных равностепенно непрерывных функций, будет компактным, если рассматривается равномерная сходимость или, тем более, сходимость в среднем.

В самом деле, по теореме Арцела любое такое бесконечное множество имеет хоть одну предельную функцию, т. е. содержит равномерно сходящуюся последовательность. Разумеется, при этом сходимость в среднем также имеет место, если область задания

---

[1]) См. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 4-е изд., глава II, § 2, стр. 64, или Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, § 11.

функций ограничена, что мы и будем предполагать. Очевидно, что множество функций, компактное для равномерной сходимости, компактно и для сходимости в среднем.

Будем называть множество функций $\{\varphi\}$ ограниченным в среднем, с весом $\rho(P)$, если оно удовлетворяет условию

$$\int_{\Omega} |\varphi|^2 \rho\, dP \leqslant A.$$

Определение. Назовём *вполне непрерывным* оператором такой оператор $A\varphi$, который, будучи применён ко всем функциям некоторого *ограниченного в среднем* множества $\{\varphi\}$, превращает его *в компактное множество в смысле сходимости в среднем*. Если множество $A\varphi$ будет *компактным в смысле равномерной сходимости*, то оператор A мы будем называть *усиленно вполне непрерывным*.

Теорема 4. *Интегральный оператор*

$$A\varphi = \int_{\Omega} K(P_0, P)\, \varphi(P)\, \rho(P)\, dP,$$

где функция $K(P_0, P)$ непрерывна, а $\rho(P)$—интегрируемая функция, есть усиленно вполне непрерывный оператор.

Пусть $\{\varphi\}$ — множество функций, ограниченное в среднем

$$\int_{\Omega} |\varphi|^2 \rho\, dP < A.$$

Пользуясь неравенством Буняковского, легко видеть, что семейство функций $\{A\varphi\}$ является равномерно ограниченным. В самом деле,

$$|\omega|^2 \leqslant \int_{\Omega} |\varphi|^2 \rho\, dP \int_{\Omega} |K(P_0, P)|^2 \rho(P)\, dP \leqslant AM^2B,$$

если

$$|K(P_0, P)| \leqslant M, \quad B = \int_{\Omega} \rho(P)\, dP.$$

Докажем, что семейство это равностепенно непрерывно. Пусть

$$\omega = A\varphi.$$

Составим разность

$$\omega(P_1) - \omega(P_2) = \int_{\Omega} [K(P, P_1) - K(P, P_2)]\, \varphi(P)\, \rho(P)\, dP.$$

Имеем

$$|\omega(P_1) - \omega(P_2)|^2 \leqslant \int_{\Omega} |(P)|^2 \rho(P)\, dP \int_{\Omega} |K(P, P_1) - K(P, P_2)|^2 \rho(P)\, dP.$$

Выберем точку P_2 столь близко к P_1, чтобы иметь

$$|K(P, P_1) - K(P, P_2)| < \varepsilon.$$

Это возможно, так как ядро $K(P, P_0)$ непрерывно в замкнутой области изменения переменных P, P_0 и по известной теореме будет там равномерно непрерывно. При этом

$$|\omega(P_1) - \omega(P_2)|^2 \leqslant A \int_\Omega \varepsilon^2 \rho(P)\, dP = \varepsilon^2 AB,$$

где

$$B = \int_\Omega \rho(P)\, dP.$$

Мы видим, таким образом, что разность $|\omega(P_1) - \omega(P_2)|$ может быть сделана меньше любого наперёд заданного числа при P_1, достаточно близком к P_2, одновременно для всех $\omega = A\varphi$, так как в нашу оценку не вошли индивидуальные свойства функции φ. Следовательно, семейство $\{A\varphi\}$ равностепенно непрерывно. Отсюда следует компактность этого семейства в смысле равномерной сходимости и, тем более, в смысле сходимости в среднем.

Предположим теперь, что ядро $K(P_0, P)$ вещественно и непрерывно всюду в области $\Omega \times \Omega$ по обоим переменным, за исключением множества $\{P = P_0\}$ и везде в области $\Omega \times \Omega$ удовлетворяет неравенству

$$|K(P_0, P)| \leqslant \frac{A}{r^{\frac{n}{2} - \alpha}}, \quad \alpha > 0. \qquad \text{(XXIV.13)}$$

Такие ядра мы будем называть почти регулярными. Справедлива

Теорема 5. *Интегральный оператор A:*

$$A\varphi = \int_\Omega K(P_0, P)\, \varphi(P)\, \rho(P)\, dP,$$

где ядро $K(P_0, P)$ почти регулярно, а функция $\rho(P)$ ограничена, представляет собою усиленно вполне непрерывный оператор.

Доказательство этой теоремы весьма близко к доказательству предыдущей теоремы.

Пусть $\{\varphi\}$ — семейство функций, равномерно ограниченное в среднем. Докажем, что семейство $\{A\varphi\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Как и прежде, равномерная ограниченность следует из неравенства Буняковского. В самом деле, если

$$\int_\Omega |\varphi(P)|^2 \rho(P)\, dP \leqslant M,$$

то

$$\left[\int_{\Omega} K(P_0, P)\varphi(P)\rho(P)\,dP\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_{\Omega} |K(P_0, P)|^2 \rho(P)\,dP\right]\left[\int_{\Omega} |\varphi(P)|^2 \rho(P)\,dP\right].$$

В силу условия (XXIV.13) имеем:

$$\int_{\Omega} [K(P_0, P)]^2 \rho(P)\,dP \leqslant \int_{\Omega} \frac{A^2}{r^{n-2\alpha}} \rho(P)\,dP \leqslant C,$$

где C — некоторая постоянная. Пользуясь этим, получим

$$\left[\int_{\Omega} K(P_0, P)\varphi(P)\rho(P)\,dP\right]^2 \leqslant MC.$$

Ограниченность семейства $\{A\varphi\}$ доказана.

Пусть теперь $\omega = A\varphi$. Составим разность

$$\omega(P_1) - \omega(P_2) = \int_{\Omega} [K(P_1, P) - K(P_2, P)]\varphi(P)\rho(P)\,dP.$$

Имеем:

$$[\omega(P_1) - \omega(P_2)]^2 \leqslant \int_{\Omega} |\varphi(P)|^2 \rho(P)\,dP \int_{\Omega} |K(P_1, P) - K(P_2, P)|^2 \rho(P)\,d \leqslant$$

$$\leqslant M\int_{\Omega} |K(P_1, P) - K(P_2, P)|^2 \rho(P)\,dP = MI,$$

где через I обозначен интеграл

$$\int_{\Omega} |K(P_1, P) - K(P_2, P)|^2 \rho(P)\,dP. \qquad \text{(XXIV.14)}$$

Оценим этот последний интеграл. Функция $|K(P_1, P) - K(P_2, P)|^2$ представляет собой функцию $3n$ координат точек P, P_1, P_2, непрерывную в области $\Omega \times \Omega \times \Omega$ всюду, кроме множества точек $\{P = P_1$ и $P = P_2\}$. Пусть r_1 — расстояние от точки P до точки P_1, а r_2—расстояние от P до P_2. В пространстве $3n$ переменных исключим из области $\Omega \times \Omega \times \Omega$ открытые множества точек, удовлетворяющих условиям $r_1 < \eta$ и $r_2 < \eta$, где η — любое наперёд заданное положительное число. В оставшемся замкнутом множестве функция $|K(P_1, P) - K(P_2, P)|^2$ будет, по теореме Вейерштрасса, равномерно непрерывной. При $P_1 = P_2$ она обращается в нуль. Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число $\delta(\varepsilon, \eta)$, что коль скоро расстояние между точками P_1 и P_2, которое мы обозначим через r^*, будет меньше δ, то будет иметь место неравенство

$$|K(P_1, P)-K(P_2, P)|^2 < \varepsilon.$$

Воспользуемся этим замечанием для оценки интересующего нас интеграла. Пусть задано некоторое положительное число ε. Окружая в области изменения P обе особые точки P_1, P_2 малыми шарами радиуса η и разбивая интеграл (XXIV.14) на две части, положим:

$$I_1 = \int\limits_{\substack{r_1<\eta \\ r_2<\eta}} |K(P_1, P)-K(P_2, P)|^2 \rho(P)\,dP;$$

$$I_2 = \int\limits_{\substack{r_1\geqslant\eta \\ \text{или} \\ r_2\geqslant\eta}} |K(P_1, P)-K(P_2, P)|^2 \rho(P)\,dP.$$

Тогда $I=I_1+I_2$. Нетрудно видеть, что $\eta(\varepsilon)$ всегда можно взять столь малым, чтобы иметь

$$I_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Действительно,

$$[K(P_1, P)-K(P_2, P)]^2 \leqslant$$
$$\leqslant [K(P_1, P)-K(P_2, P)]^2 + [K(P_1, P)+K(P_2, P)]^2 =$$
$$= 2[K(P_1, P)]^2 + 2[K(P_2, P)]^2$$

и, следовательно,

$$I_1 \leqslant 2 \int\limits_{\substack{r_1<\eta \\ r_2<\eta}} [K(P_1, P)]^2 \rho(P)\,dP + 2 \int\limits_{\substack{r_1<\eta \\ r_2<\eta}} [K(P_2, P)]^2 \rho(P)\,dP.$$

Отсюда, применяя оценку (XXIV.13) для $K(P_1, P)$, $K(P_2, P)$, получаем

$$I_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выбрав величину $\eta(\varepsilon)$, мы можем далее найти $\delta(\varepsilon)$ таким образом, чтобы везде под знаком интеграла I_2 имело место неравенство

$$[K(P_1, P)-K(P_2, P)]^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2 \max \rho(P)\, m\Omega},$$

где $m\Omega$ — объём области Ω, как только $r^* < \delta$.

При этом будем иметь

$$I_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2m\Omega} \int\limits_{\Omega} \frac{\rho(P)}{\max \rho}\, dP \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда

$$I \leqslant \varepsilon.$$

Мы видим, что величина $\delta(\varepsilon)$ оказалась зависящей только от расстояния между точками P_1 и P_2 и не зависит от функции φ. Следовательно, множество функций $\{A\varphi\}$ равностепенно непрерывно. Выше было доказано, что оно равномерно ограничено. В силу теоремы Арцела множество $\{A\varphi\}$ является компактным в смысле равномерной сходимости. Таким образом, оператор A является усиленно вполне непрерывным, что и требовалось доказать.

Мы выясним далее, что свойство оператора быть вполне непрерывным есть чрезвычайно важное свойство, ибо именно из него будут следовать основные теоремы для уравнений с нагруженным симметрическим ядром.

Можно доказать, что вся качественная сторона теории Фредгольма для несимметрических ядер, т. е. альтернатива Фредгольма условия разрешимости уравнений и т. д., целиком переносится на уравнения

$$\varphi = \lambda A\rho + f$$

с вполне непрерывным оператором A. Однако мы не будем останавливаться на этом вопросе.

§ 2. Доказательство существования собственного значения

Теорема 6. *Интегральное уравнение*

$$\varphi = \lambda A\varphi \tag{XXIV.15}$$

с вещественным симметрическим ядром, если A — вполне непрерывный оператор, имеет по крайней мере одно собственное значение.

Доказательство. Заметим прежде всего, что для наших целей достаточно установить существование хотя бы одного характеристического числа и фундаментальной функции у уравнения

$$\varphi = \mu A^2\varphi$$

В самом деле, перепишем это последнее уравнение в виде

$$\varphi - \mu A^2\varphi = 0,$$

и пусть μ_0 — его собственное значение, а φ_0 — соответствующая собственная функция. Полагая $\mu_0^2 = \lambda_0$, имеем

$$(E - \lambda_0 A)\,[(E + \lambda_0 A)\,\varphi_0] = 0,$$

в обозначениях лекции XVIII.

Левая часть последнего уравнения может обратиться в нуль лишь в том случае, если функция

$$\psi_0 = (E + \lambda_0 A)\,\varphi_0$$

является решением уравнения

$$(E - \lambda A)\,\psi = 0 \text{ при } \lambda = \lambda_0.$$

Следовательно, либо $\psi=0$, либо уравнение $(E-\lambda_0 A)\psi=0$ имеет нетривиальное решение. В первом случае имеем

$$(E+\lambda_0 A)\varphi_0=0,$$

и, значит, φ_0 есть собственная функция уравнения (XXIV.15), отвечающая собственному значению $\lambda=-\lambda_0$. Во втором случае также получаем существование собственного значения $\lambda=\lambda_0$ у уравнения (XXIV.15).

Рассмотрим выражение

$$\frac{(A\varphi,\ A\varphi)}{(\varphi,\ \varphi)}=\frac{(\varphi,\ A^2\varphi)}{(\varphi,\ \varphi)}$$

для всевозможных функций φ, вещественных и интегрируемых с квадратом и не эквивалентных нулю. Это отношение не может равняться нулю для всех φ, ибо иначе $A\varphi$ было бы тождественным нулём. Очевидно, что оно не отрицательно. Оно не может, кроме того, принимать неограниченно больших значений. Действительно, это отношение не меняется от умножения функции на любую постоянную. Поэтому достаточно установить ограниченность этого отношения для функций, равномерно ограниченных в среднем, а это очевидным образом вытекает из доказанного ранее. Следовательно, выражение $\frac{(A\varphi, A\varphi)}{(\varphi,\ \varphi)}$ имеет точную верхнюю границу, которую мы обозначим через $\varkappa_1$.

При этом, очевидно,

$$\frac{(A^2\varphi, A^2\varphi)}{(\varphi,\ \varphi)}=\frac{(A^2\varphi,\ A^2\varphi)}{(A\varphi,\ A\varphi)}\,\frac{(A\varphi,\ A\varphi)}{(\varphi,\ \varphi)}\leqslant\varkappa_1^2. \qquad \text{(XXIV.16)}$$

Пусть φ_n — последовательность функций, таких, что

$$(\varphi_n,\ \varphi_n)=1, \qquad \text{(XXIV.17)}$$

$$\lim_{n\to\infty}(A\varphi_n,\ A\varphi_n)=\varkappa_1. \qquad \text{(XXIV.18)}$$

Такую последовательность всегда можно построить. По свойству верхней границы существует последовательность $\overset{*}{\varphi}_n$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(A\overset{*}{\varphi}_n,\ A\overset{*}{\varphi}_n)}{(\overset{*}{\varphi}_n,\ \overset{*}{\varphi}_n)}=\varkappa_1.$$

Полагая затем

$$\varphi_n=\frac{\overset{*}{\varphi}_n}{\sqrt{(\overset{*}{\varphi}_n,\ \overset{*}{\varphi}_n)}},$$

получим искомую последовательность.

Рассмотрим последовательность,

$$\psi_n=\varkappa_1\varphi_n-A^2\varphi_n.$$

Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty}(\psi_n, \psi_n) = 0. \tag{XXIV.19}$$

В самом деле,

$$(\psi_n, \psi_n) = \varkappa_1^2(\varphi_n, \varphi_n) - 2\varkappa_1(\varphi_n, A^2\varphi_n) + (A^2\varphi_n, A^2\varphi_n).$$

В силу (XXIV.16) имеем:

$$(\psi_n, \psi_n) \leqslant 2\varkappa_1^2 - 2\varkappa_1(\varphi_n, A^2\varphi_n) = 2\varkappa_1(\varkappa_1 - (A\varphi_n, A\varphi_n)).$$

Пользуясь (XXIV.18), убеждаемся в справедливости (XXIV.19).

Таким образом, последовательность функций $\varkappa_1\varphi_n - A^2\varphi_n$ стремится к нулю в среднем. Благодаря усиленной полной непрерывности оператора A^2 последовательность $A^2\varphi_n$ равностепенно непрерывна и равномерно ограничена. Поэтому из неё можно выбрать подпоследовательность $A^2\varphi_{n_k}$, сходящуюся равномерно к некоторой непрерывной функции.

Но

$$\lim A^2\varphi_{n_k} = \varkappa_1 \lim \varphi_{n_k}, \tag{XXIV.20}$$

где предел справа понимается в среднем. Значит, последовательность φ_{n_k} также имеет своим пределом в среднем непрерывную функцию, которую мы обозначим через φ_0. Переходя к пределу в соотношении (XXIV.20), получим

$$\varkappa_1\varphi_0 - A^2\varphi_0 = 0.$$

Или, полагая

$$\varkappa_1 = \frac{1}{\mu_1},$$

имеем

$$\varphi_0 - \mu_1 A^2\varphi_0 = 0.$$

Следовательно, уравнение (XXIV.15) имеет собственное значение μ_1, что и требовалось доказать.

Сопоставляя теоремы 4, 5 и 6, мы видим, что нами доказано существование по крайней мере одной собственной функции и одного собственного значения для интегральных уравнений с нагруженными вещественными симметричными ядрами в двух случаях — для непрерывных ядер и для почти регулярных ядер.

Важно отметить, что собственная функция, существование которой мы доказали, всегда непрерывна. Это следует из усиленной полной непрерывности оператора A.

ЛЕКЦИЯ XXV.

БИЛИНЕЙНАЯ ФОРМУЛА И ТЕОРЕМА ГИЛЬБЕРТА-ШМИДТА.

§ 1. Билинейная формула.

Рассматривая интегральное уравнение с симметрическим нагруженным ядром

$$\varphi = \lambda A\varphi, \tag{XXV.1}$$

мы доказали в прошлой лекции, что уравнение это всегда имеет фундаментальную функцию φ и характеристическое число λ_1. Умножая эту функцию на постоянную, добьёмся того, чтобы иметь

$$\int\limits_{\Omega} [\varphi_1(P)]^2 \rho(P)\, dP = 1.$$

Введём теперь новый интегральный оператор $B_1\varphi$, определяемый условиями:

$$B_1\varphi = \psi(P_0) = \frac{1}{\lambda_1} \varphi_1(P_0) \int\limits_{\Omega} \varphi_1(P)\, \varphi(P)\, \rho(P)\, dP.$$

Очевидно, ядром операции B_1 служит

$$L(P,\ P_0) = \frac{\varphi_1(P_0)\, \varphi_1(P)}{\lambda_1}.$$

Уравнение

$$\varphi = \lambda B_1\varphi \tag{XXV.2}$$

имеет, очевидно, одно собственное значение λ_1 и одну фундаментальную функцию φ_1. В самом деле, функция $B_1\varphi$ отличается лишь множителем от функции φ_1. Следовательно, при любом λ решением уравнения (XXV.2), с точностью до постоянного множителя, может служить только функция φ_1. Подставляя $\varphi = \varphi_1$ в (XXV.2), получим:

$$\varphi_1(P) = \frac{\lambda}{\lambda_1} \varphi_1(P),$$

откуда

$$\lambda = \lambda_1.$$

Лемма. *Все фундаментальные функции интегрального уравнения*

$$\varphi = \lambda (A - B_1) \varphi \tag{XXV.3}$$

с ядром

$$K - L = K(P, P_0) - \frac{\varphi_1(P)\varphi_1(P_0)}{\lambda_1} \tag{XXV.4}$$

являются фундаментальными функциями уравнения (XXV.1) *при тех же самых значениях* λ. *Обратно, все фундаментальные функции уравнения* (XXV.1), *ортогональные к* φ_1, *служат фундаментальными функциями уравнения* (XXV.3) *при тех же значениях* λ.

Доказательство. Пусть φ_k $(k \neq 1)$ есть некоторое решение уравнения (XXV.1), соответствующее собственному значению λ_k. Тогда

$$B_1 \varphi_k = 0$$

в силу того, что все фундаментальные функции уравнения (XXV.1) ортогональны. Значит,

$$(A - B_1)\varphi_k = A\varphi_k = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k,$$

т. е.

$$\varphi_k = \lambda_k (A - B_1)\varphi_k.$$

Далее,

$$\lambda (A - B_1)\varphi_1 = 0.$$

Следовательно, все решения уравнения (XXV,1), кроме φ_1, удовлетворяют уравнению (XXV,3) и притом с теми же собственными значениями.

Докажем теперь, что всякая собственная функция уравнения (XXV.3) удовлетворяет уравнению (XXV.1).

Установим прежде всего, что все решения (XXV.3) при любом λ ортогональны к φ_1. В самом деле, из (XXV.3) имеем:

$$(\varphi, \varphi_1) = \lambda [(A - B_1)\varphi, \varphi_1] = \lambda (\varphi, (A - B_1)\varphi_1) = 0.$$

Пусть теперь φ_k^* — какое угодно решение (XXV.3), соответствующее $\lambda = \lambda^*$. В силу того, что φ_k^* ортогонально к φ_1, имеем:

$$B_1 \varphi_k^* = 0.$$

Таким образом,

$$(A - B_1)\varphi_k^* = A\varphi_k^*$$

и, следовательно,

$$\varphi_k^* = \lambda^* (A - B_1)\varphi_k^* = \lambda^* A \varphi_k^*,$$

что и требовалось доказать.

Обозначим для краткости

$$A - B_1 = A_1.$$

Оператор A_1 есть опять симметрический интегральный оператор. Могут представиться две возможности: или его ядро — тождественный нуль или он имеет ещё по крайней мере одну фундаментальную функцию $\varphi_2(P)$, соответствующую собственному значению λ_2 (λ_2 может иногда быть равным λ_1). Но тогда мы сможем составить операцию B_2 с ядром

$$\frac{\varphi_2(P)\,\varphi_2(P_0)}{\lambda_2}$$

и, повторяя прежние рассуждения, притти к оператору

$$A_2 = A - B_1 - B_2,$$

для которого интегральное уравнение

$$\varphi = \lambda A_2 \varphi$$

будет иметь всё те же и только те фундаментальные функции, что и (XXV.1), кроме φ_1 и φ_2.

Будем продолжать этот процесс.

Если ядро A имеет лишь m собственных функций, то оператор

$$A_m = A - B_1 - B_2 - \ldots - B_m \tag{XXV.5}$$

окажется не имеющим ни одной фундаментальной функции, т. е. тождественно равным нулю.

Отсюда мы имеем теорему.

Теорема 1. *Симметрическое нагруженное ядро, имеющее конечное число фундаментальных функций, представляется в виде*

$$K(P, P_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\,\varphi_i(P_0)}{\lambda_i} \tag{XXV.6}$$

и, следовательно, является вырожденным.

Если ядро $K(P, P_0)\,\rho(P_0)$ имеет бесконечное множество собственных функций, то мы можем, расположив все λ_i в порядке возрастания абсолютной величины, получить операторы

$$A_m = A - B_1 - B_2 - \ldots - B_m,$$

все собственные значения которых достаточно велики по абсолютной величине, так как на основании 4-й теоремы Фредгольма последовательность $\{\lambda_m\}$, если она бесконечна, должна быть неограниченной. Пусть

$$\varkappa_m = \frac{1}{\lambda_m^2}.$$

Тогда для всех φ, таких, что $(\varphi, \varphi) = 1$,

$$\max(A_m\varphi, A_m\varphi) = \varkappa_m.$$

В самом деле, если бы $(A_m\varphi, A_m\varphi)$ могло принимать значения, большие, чем $\varkappa_m$, уравнение

$$\varphi = \lambda A_m \varphi$$

имело бы собственное значение λ_{m+1}, причём

$$|\lambda_{m+1}| < |\lambda_m|,$$

что невозможно.

Мы имеем, таким образом,

$$\lim_{m \to \infty} (A_m\varphi, A_m\varphi) = 0 \tag{XXV.7}$$

и притом равномерно для всех φ, равномерно ограниченных в среднем.

В известном смысле равенство (XXV.7) говорит о том, что $A_m\varphi$ стремится к нулю; следовательно, ядро оператора $K - \sum_{i=1}^{m} B_i$ стремится к нулю. Поэтому ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} B_i$$

в каком-то смысле представляет ядро $K(P, P_0)$.

Если бы оказалось, что ряд $\sum B_i$ равномерно сходится, то ядро $K - \sum_{i=1}^{m} B_i$ оказалось бы ядром, не имеющим собственных значений, т. е. равнялось бы нулю.

Таким образом, нами получена

Теорема 2. *Если ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\,\varphi_i(P_0)}{\lambda_i} \tag{XXV.8}$$

сходится равномерно по двум переменным, то сумма его равна ядру $K(P, P_0)$:

$$K(P, P_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\,\varphi_i(P_0)}{\lambda_i}.$$

Однако равномерной сходимости ряда (XXV.8) может вообще и не быть. При этом представляет интерес ещё один вопрос. *Назовём функцию* $f(P_0)$, *имеющую вид:*

$$f(P_0) = \int_{\Omega} K(P, P_0)\, h(P)\, \rho(P)\, dP,$$

где функция h интегрируема с квадратом, истокообразно представленной через h с помощью ядра K.

Подставив вместо $K(P, P_0)$ его предполагаемое представление (XXV.8), мы получили бы для f формулу

$$f(P_0)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(P_0)\int_{\Omega}\frac{\varphi_i(P)h(P)\rho(P)\,dP}{\lambda_i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P_0), \quad \text{(XXV.9)}$$

где

$$h_i=\int_{\Omega}h(P)\varphi_i(P)\rho(P)\,dP.$$

Докажем теорему.

Теорема 3. *Если $f(P_0)$ — функция, представимая истокообразно через h, причём интеграл*

$$\int_{\Omega}h^2(P)\rho(P)\,dP$$

сходится, то ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P_0) \quad \text{(XXV.10)}$$

сходится в среднем и сумма его равна $f(P_0)$. Иными словами,

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\Omega}\Big[f(P_0)-\sum_{i=1}^{N}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_f(P_0)\Big]^2\rho(P_0)\,dP_0=0. \quad \text{(XXV.11)}$$

Эта теорема есть очевидное следствие формулы (XXV.7). В самом деле,

$$f(P_0)-\sum_{i=1}^{N}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P_0)=\int_{\Omega}\Big(K-\sum_{i=1}^{N}B_i\Big)h(P)\rho(P)\,dP=A_Nh,$$

откуда, применяя формулу (XXV.7), сразу получим нашу теорему.

В свете доказанных теорем нам легко будет в дальнейшем уяснить смысл рассуждения, с помощью которого мы устанавливаем существование собственных значений. Докажем сначала лемму.

Лемма 2. (Неравенство Бесселя.) *Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ — конечная или бесконечная последовательность вещественных, ортогональных и нормированных с весом ρ функций:*

$$\int_{\Omega}\varphi_i(P)\varphi_j(P)\rho(P)\,dP=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

и пусть f — некоторая функция с интегрируемым квадратом

$$\int\limits_{\Omega} f^2 \rho \, dP = A.$$

Назовём числа

$$f_i = \int\limits_{\Omega} f \varphi_i \rho \, dP$$

коэффициентами Фурье для функции f. Тогда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i^2$ сходится. и сумма его не превосходит A:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \leqslant A. \tag{XXV.12}$$

Если для некоторой функции неравенство (XXV 12) превращается в равенство, то говорят, что система функций замкнута по отношению к f. Система функций, замкнутая по отношению ко всем функциям с интегрируемым квадратом, называется просто замкнутой.

Неравенство (XXV.12) носит название неравенства Бесселя.

Для доказательства установим сначала, что

$$\sum_{i=1}^{N} f_i^2 \leqslant A,$$

откуда при $N \to \infty$ сразу получим доказательство нашей леммы. Имеем

$$0 \leqslant \int\limits_{\Omega} \left(f - \sum_{i=1}^{N} \varphi_i f_i\right)^2 \rho \, dP =$$

$$= \int\limits_{\Omega} f^2 \rho \, dP - 2 \sum_{i=1}^{N} f_i \int\limits_{\Omega} f \varphi_i \rho \, dP + \sum_{i=1}^{N} f_i^2 \int \varphi_i^2 \rho \, dP =$$

$$= \int\limits_{\Omega} f^2 \rho \, dP - \sum_{i=1}^{N} f_i^2 = A - \sum_{i=1}^{N} f_i^2.$$

Лемма доказана.

Замкнутость системы $\{\varphi_i\}$ по отношению к f имеет следующий смысл. Если

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} f_i^2 = A,$$

то

$$\lim_{N \to \infty} \left[A - \sum_{i=1}^{N} f_i^2\right] = 0$$

и, значит,

$$\lim_{N \to \infty} \int\limits_{\Omega} \left(f - \sum_{i=1}^{N} \varphi_i f_i\right)^2 \rho \, dP = 0,$$

т. е. функция $f(P)$ представима рядом $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i \varphi_i(P)$, сходящимся в среднем.

Теорема 3 устанавливает, таким образом, замкнутость системы фундаментальных функций по отношению к любой истокообразно представленной функции.

Лемма 3. *Пусть*

$$u_1(P),\ u_2(P),\ \ldots,\ u_N(P)$$

какая-то система ортогональных нормированных функций, а $f(P)$ — произвольная функция с интегрируемым квадратом. Будем исследовать минимум интеграла

$$I_N = \int\limits_{\Omega} [f(P) - \sum_{i=1}^{N} a_i u_i(P)]^2\, dP.$$

Этот минимум достигается при

$$a_i = \int\limits_{\Omega} f(P)\, u_i(P)\, dP$$

и равен

$$\int\limits_{\Omega} [f(P)]^2\, dP - \sum_{i=1}^{N} a_i^2.$$

В самом деле, пусть

$$f(P) = \sum_{i=1}^{n} f_i u_i(P) + R_N(P); \qquad \text{(XXV.13)}$$

умножая обе части (XXV.13) на $u_i(P)$ и интегрируя, получим

$$\int\limits_{\Omega} R_N(P)\, u_i(P)\, dP = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

При этом

$$I_N = \int\limits_{\Omega} [\sum_{i=1}^{N} (f_i - a_i)\, u_i(P) + R_N(P)]^2\, dP =$$

$$= \int\limits_{\Omega} R_N^2(P)\, dP + \sum_{i=1}^{N} (f_i - a_i)^2.$$

Очевидно, что это выражение будет иметь минимум при $a_i = f_i$. Тогда:

$$\int\limits_\Omega R_N^2(P)\,dP = \int\limits_\Omega \Big[f(P) - \sum_{i=1}^{N} f_i u_i(P)\Big]^2 dP = \int\limits_\Omega f^2(P)\,dP - \sum_{i=1}^{N} f_i^2,$$

что и требовалось доказать.

Сделаем ещё два небольших замечания.

Теорема 4. *Для любой функции ψ с интегрируемым квадратом справедливо равенство*:

$$(\psi, A\psi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i^2}{\lambda_i}, \tag{XXV.14}$$

где ψ_i обозначают коэффициенты Фурье функции ψ, т. е.

$$\psi_i = \int\limits_\Omega \psi(P)\,\varphi_i(P)\,\rho(P)\,dP.$$

Заметим, что $A_m\psi = A\psi - \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\psi_i \varphi_i(P)}{\lambda_i}$, следовательно,

$$(\psi, A_m\psi) = (\psi, A\psi) - \sum_{i=1}^{m}\left(\psi, \frac{\psi_i\varphi_i(P)}{\lambda_i}\right) = (\psi, A\psi) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_i^2}{\lambda_i}.$$

Но

$$|(\psi, A_m\psi)| = \Big|\int\limits_\Omega \psi A_m\psi\rho\,dP\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int\limits_\Omega \psi^2\rho\,dP \int\limits_\Omega (A_m\psi)^2\rho\,dP} \leqslant \int\limits_\Omega \psi^2\rho\,dP\,|\varkappa_m|.$$

Так как $\varkappa_m \to 0$ при $m\to\infty$, то и величина $(\psi, A_m\psi)$ стремится к нулю.

Мы имеем:

$$\lim_{m\to\infty}\Big|(\psi, A\psi) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_i^2}{\lambda_i}\Big| = 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Если все собственные значения λ_j положительны, то и $(\psi, A\psi) \geqslant 0$ для любых ψ, и обратно, если $(\psi, A\psi)$ никогда не принимает отрицательных значений, то все λ_i положительны.*

Ядра, имеющие только положительные собственные значения, называются положительно определёнными.

Теорема 5. *Наименьшее собственное значение положительно определённого ядра определяется равенством*

$$\frac{1}{\lambda_0}=\sup_{(\psi,\,\psi)=1}(\psi,\,A\psi). \qquad \text{(XXV.15)}$$

В самом деле, $(\psi,\,A\psi)=\frac{1}{\lambda_0}$ при $\psi=\varphi_0$. С другой стороны,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\psi_i^2}{\lambda_i}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\psi_i^2}{\lambda_0},$$

где λ_0 — наименьшее положительное из λ_i, и так как $(\psi,\,\psi)=1$, то в силу (XXV.12)

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\psi_i^2}{\lambda_i}\leqslant\frac{1}{\lambda_0},$$

что и требовалось доказать.

Напомним, что именно путём определения верхней грани выражения $(\psi_0,\,A\psi)$ при условии $(\psi,\,\psi)=1$ и было установлено существование собственного значения у интегрированного ядра K_2.

§ 2. Теорема Гильберта-Шмидта.

Чтобы закончить наше исследование, мы докажем ещё, что при известных условиях сходимость ряда (XXV.10) будет равномерной.

Теорема 6. (Гильберта-Шмидта.) *Если вещественное симметричное ядро $K(P_0,\,P)$ интегрируемо с квадратом по каждому переменному, причём интеграл квадрата равномерно относительно другого переменного ограничен, т. е.*

$$\int\limits_{\Omega}|K(P_0,\,P)|^2\rho(P)\,dP=A(P_0)\leqslant A, \qquad \text{(XXV.16)}$$

то ряд (XXV.10) *сходится равномерно к функции $f(P_0)$.*

В самом деле, в силу неравенства Бесселя, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i^2(P_0)}{\lambda_i^2}$ сходится, причём имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i^2(P_0)}{\lambda_i^2}\leqslant A. \qquad \text{(XXV.17)}$$

Это вытекает из того, что $\frac{\varphi_i(P_0)}{\lambda_i}$ служат коэффициентами Фурье для функции $f = K(P_0, P)$:

$$\frac{\varphi_i(P_0)}{\lambda_i} = \int\limits_{\Omega} K(P_0, P)\,\varphi_i(P)\,\rho(P)\,dP. \qquad \text{(XXV.18)}$$

Кроме того, сходится и ряд с постоянными членами

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_i^2 \qquad \text{(XXV.19)}$$

опять в силу неравенства Бесселя.

Из сходимости ряда (XXV.19) следует, что

$$\sum_{i=m}^{m+p} h_i^2 < \varepsilon_m,$$

где $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$.

Оценим сумму

$$\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{h_i \varphi_i(P_0)}{\lambda_i} \right|. \qquad \text{(XXV.20)}$$

Неравенство Коши даёт нам

$$\left(\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{h_i \varphi_i}{\lambda_i} \right| \right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=m}^{m+p} h_i^2 \right) \left(\sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2}{\lambda_i^2} \right) \leqslant \varepsilon_m A;$$

следовательно, сумма (XXV.20) сколь угодно мала вместе с m и, значит, ряд (XXV.10) сходится равномерно.

Обозначим

$$\gamma(P_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i \varphi_i(P_0)}{\lambda_i}.$$

Переходя в формуле (XXV.11) к пределу, получим:

$$\int\limits_{\Omega} (f - \gamma)^2 \rho\, dP_0 = 0.$$

Следовательно,

$$f(P_0) = \gamma(P_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i \varphi_i(P_0)}{\lambda_i}. \qquad \text{(XXV.21)}$$

Теорема Гильберта-Шмидта доказана.

Следствие. (Билинейный ряд для повторного ядра.) *Если ядро $K(P_0, P)$ удовлетворяет условию теоремы, то для повторного ядра билинейный ряд сходится и притом равномерно относительно P при фиксированном P_0.*

Коэффициентами Фурье для повторного ядра будут служить функции $\frac{\varphi_i(P_0)}{\lambda_i^2}$. Действительно,

$$\int_\Omega K_2(P_0, P)\varphi_i(P)\rho(P)\,dP =$$

$$= \int_\Omega K(P_0, P_1)\left[\int_\Omega K(P_1, P)\varphi_i(P)\rho(P)\,dP\right]\rho(P_1)\,dP_1 =$$

$$= \frac{1}{\lambda_i}\int_\Omega K(P_0, P_1)\varphi_i(P_1)\rho(P_1)\,dP_1 = \frac{1}{\lambda_i^2}\varphi_i(P_0).$$

Значит,

$$K_2(P_0, P) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P_0)\varphi_i(P)}{\lambda_i^2}. \qquad \text{(XXV.22)}$$

Тем более сходимость имеет место для ядер K_m, где $m \geqslant 2$; для этих ядер, очевидно, имеет место формула:

$$K_m(P_0, P) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P_0)\varphi_i(P)}{\lambda_i^m}.$$

Можно показать, хотя мы не будем делать этого, что сходимость билинейного ряда (XXV.22) равномерна по обеим переменным.

Теорема Гильберта-Шмидта, очевидно, справедлива для непрерывных ядер при любом ограниченном измеримом весе. Нетрудно убедиться в том, что она справедлива и для всех почти регулярных ядер. В самом деле, для таких ядер

$$\int_\Omega \{K(P_0, P)\}^2\rho(P)\,dP \leqslant \int_\Omega \frac{A^2}{r^{n-2\alpha}}\rho(P)\,dP < M,$$

что и требуется в предположениях теоремы Гильберта-Шмидта.

Теорема Гильберта-Шмидта непосредственно распространяется на все ядра типа функции Грина для двух или трёх независимых переменных. В самом деле, такие ядра, имеющие особенность $\lg\frac{1}{r}$ или $\frac{1}{r}$, очевидно являются почти регулярными.

Рассмотрим интеграл

$$d_N = \int_\Omega \int_\Omega \left[K(P, P_1) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(P_1)}{\lambda_i}\right]^2 \rho(P)\rho(P_1)\,dP\,dP_1.$$

Простые преобразования дают

$$d_N = \int_\Omega \int_\Omega [K(P, P_1)]^2 \rho(P)\rho(P_1)\,dP\,dP_1 -$$

$$-2\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \int_\Omega K(P, P_1)\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(P_1)}{\lambda_i}\rho(P)\rho(P_1)\,dP\,dP_1 +$$

$$+\int_\Omega \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i^2(P)\varphi_i^2(P_1)}{\lambda_i^2}\rho(P)\rho(P_1)\,dP\,dP_1 =$$

$$= \int_\Omega \left[\int_\Omega [K(P, P_1)]^2 \rho(P_1)\,dP_1 - 2\sum_{i=1}^{N}\frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i^2} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i^2}\right]\rho(P)\,dP =$$

$$= \int_\Omega \left[K_2(P, P) - \sum_{i=1}^{N}\frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i^2}\right]\rho(P)\,dP.$$

Очевидно, $d_N > 0$. По доказанному выше ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i^2}$ сходится к функции $K_2(P, P)$.

На основании леммы 7 из лекции VI мы можем утверждать, что неубывающая последовательность функций $\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i^2}$, имея ограниченный интеграл, стремится почти везде к предельной функции, причём возможен предельный переход под знаком интеграла. Эта предельная функция не может быть иной, чем $K_2(P, P)$, откуда следует, что $\lim d_N = 0$.

Полученный результат даёт важную теорему.

Теорема 7. Билинейный ряд для непрерывного ядра сходится к этому ядру в среднем по двум переменным.

Существует теорема, принадлежащая Мерсеру, которая гласит: Билинейный ряд для любого непрерывного положительно определённого ядра, т. е. ядра, имеющего лишь положительные собственные значения, сходится всегда равномерно.

Эту теорему, из которой следует равномерная по обеим переменным сходимость (XXV.22), мы также не будем доказывать.

§ 3. Обоснование метода Фурье для решения краевых задач математической физики.

Теперь мы можем возвратиться к утверждениям, оставленным нами без доказательства при изложении метода Фурье в лекции XXIII. Мы докажем пять основных свойств системы собственных функций, сформулированных в лекции XXIII на стр. 325.

Как мы видели, собственные функции краевых задач для уравнения (XXIII.7) представляют собой решения интегрального уравнения (XXIII.9) с вещественным симметрическим и почти регулярным ядром.

Отсюда следует, что собственные значения λ_i будут вещественными. Несколько позже мы докажем, что собственных значений бесконечно много и что среди них нет отрицательных чисел.

Далее, собственные функции, по доказанному выше, можно считать ортогональными и нормированными.

Некоторые свойства собственных функций нам полезно будет исследовать порознь для различных краевых задач. Рассмотрим сначала первую краевую задачу.

Мы показали, что функции U_i — решения уравнения

$$\Delta U_i + \lambda_i U_i = 0, \tag{XXV.23}$$

удовлетворяющие условиям

$$U_i|_S = 0, \tag{XXV.24}$$

суть решения интегрального уравнения:

$$U_i = \lambda_i \int\int_\Omega\int G U_i \, d\Omega. \tag{XXV.25}$$

Докажем теперь обратное утверждение: всякое решение интегрального уравнения (XXV.25) имеет непрерывные производные до второго порядка включительно внутри области, непрерывно вплоть до границы, удовлетворяет дифференциальному уравнению (XXV.23) и граничному условию (XXV.24).

Действительно, рассмотрим уравнение Пуассона

$$\Delta u = -\lambda_i U_i, \tag{XXV.26}$$

где в правой части стоит решение интегрального уравнения (XXV.25), которое будет ограниченным, в соответствии с доказанным ранее свойством решений интегральных уравнений с симметрическими почти регулярными ядрами. Будем искать решение этого уравнения, удовлетворяющее условию

$$u|_S = 0. \tag{XXV.27}$$

Такое решение можно построить в два приёма. Рассмотрим прежде всего ньютонов потенциал с плотностью $\frac{\lambda_i U_i}{4\pi}$:

$$Q(P_0) = \frac{\lambda_i}{4\pi}\int\int_\Omega\int \frac{U_i}{r} d\Omega. \tag{XXV.28}$$

Этот потенциал имеет везде в пространстве ограниченный оператор Лапласа ΔQ и непрерывные производные первого порядка. Функция u, удовлетворяющая уравнению (XXV.26) и условию (XXV.27), будет представлять собою сумму

$$u(P_0) = Q(P_0) + w(P_0),$$

где $w(P_0)$ — гармоническая в области Ω функция, принимающая значения $-Q(S)$ на границе S. Такая функция существует. По лемме Ляпунова она имеет правильную нормальную производную.

Следовательно, существует решение u уравнения (XXV.26) при условии (XXV.27), обладающее правильной нормальной производной.

Но такое решение, как было доказано в лекции XXI, представимо в виде:

$$u(P_0) = \lambda_i \iiint\limits_{\Omega} G(P_0, P)\, U_i(P)\, dP. \qquad \text{(XXV.29)}$$

Следовательно, правая часть равенства (XXV.29) непрерывна и обладает правильной нормальной производной. Но в силу уравнения (XXV.25) эта правая часть равна $U_i(P_0)$. Значит, функция $U_i(P_0)$ совпадает с функцией $u(P_0)$ и поэтому непрерывна, имеет правильную нормальную производную и удовлетворяет уравнению (XXV.23) и условию (XXV.24).

Перейдём теперь к исследованию собственных функций второй краевой задачи. Мы доказали, что всякая функция V_i, ограниченная, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta V_i + \lambda_i V_i = 0 \qquad \text{(XXV.30)}$$

и граничному условию

$$\left.\frac{\partial V_i}{\partial n}\right|_S = 0, \qquad \text{(XXV.31)}$$

причём производная понимается как правильная нормальная производная, будет решением интегрального уравнения

$$V_i(P_0) = \lambda_i \iiint\limits_{\Omega} G^*(P_0, P)\, V_i(P)\, dP, \qquad \text{(XXV.32)}$$

где $G^*(P_0, P)$ — обобщённая функция Грина для задачи Неймана. Докажем обратное утверждение.

Будем искать решение уравнения

$$\Delta v = -\lambda_i V_i \qquad \text{(XXV.33)}$$

при условии

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S = 0. \qquad \text{(XXV.34)}$$

Такое решение существует, так как функция V_i ортогональна к постоянной, то-есть к решению однородной задачи Неймана. Для того чтобы отыскать нужное решение, мы составим сначала ньютонов потенциал

$$R(P_0)=\frac{\lambda_i}{4\pi}\int\int_{\Omega}\int\frac{V_i}{r}\,d\Omega. \tag{XXV.35}$$

Этот потенциал, в силу ограниченности V_i, будет иметь всюду непрерывные производные первого порядка, удовлетворяющие условию Ляпунова.

Далее, функция v будет представима в виде

$$v(P_0)=R(P_0)+s(P_0), \tag{XXV.36}$$

где $s(P_0)$ — гармоническая функция, удовлетворяющая условию

$$\left.\frac{\partial s}{\partial n}\right|_S=-\left.\frac{\partial R}{\partial n}\right|_S.$$

Но $\left.\frac{\partial R}{\partial n}\right|_S$ есть непрерывная функция на поверхности S, удовлетворяющая условию Ляпунова. В силу теоремы 3 лекции XXI функция s будет представляться в виде потенциала простого слоя, плотность которого в свою очередь будет удовлетворять условию Ляпунова. По теореме 4 лекции XXI функция обладает правильной нормальной производной.

В лекции XXI было доказано, что решение уравнения (XXV.33) с условиями (XXV.34) может представлено в виде

$$v(P_0)=\lambda_i\int\int_{\Omega}\int G^*(P_0,\ P)\,V_i(P)\,dP. \tag{XXV.37}$$

Следовательно, функция $v(P_0)$ совпадает с функцией V_i. В силу этого V_i обладает правильной нормальной производной, обращающейся в нуль на границе, и удовлетворяет уравнению (XXV.30).

Для того чтобы закончить доказательство свойства 1, нам остаётся показать, что среди собственных чисел λ_i ядра, представляющего функцию Грина, нет отрицательных.

Пользуясь уравнением (XXIII.7), будем иметь:

$$\int_{\Omega}U_i\,\Delta U_i\,dx\,dy\,dz=-\lambda_i\int_{\Omega}U_i^2\,dx\,dy\,dz=-\lambda_i. \tag{XXV.38}$$

С другой стороны, по формуле Грина, пользуясь ограниченностью U_i и правильностью нормальных производных, получим:

$$\int\limits_{\Omega} U_i \Delta U_i \, dx\, dy\, dz =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz + \int\limits_{S} U_i \frac{\partial U_i}{\partial n} dS. \quad \text{(XXV.39)}$$

Но если $U_i|_S = 0$ или $\left.\frac{\partial U_i}{\partial n}\right|_S = 0$, то последнее слагаемое, содержащее поверхностный интеграл, обращается в нуль, и мы получим

$$\lambda_i = \int\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz \geqslant 0, \quad \text{(XXV.40)}$$

что и требовалось доказать.

Докажем третье свойство системы собственных функций — её полноту. Пусть φ — произвольная функция, удовлетворяющая на границе области условию $\varphi|_S = 0$ или $\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S = 0$ и всюду имеющая непрерывные производные 2-го порядка. Тогда, если положить

$$\Delta\varphi = 4\pi\psi,$$

то ψ — непрерывная функция в замкнутой области Ω. По свойству функции Грина

$$\varphi = \int\limits_{\Omega} G(P_0, P)\, \psi(P)\, dP.$$

Таким образом, функция φ истокообразно представлена через ядро и, следовательно, разлагается в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям. Таким образом, система собственных функций является полной по отношению к любой функции φ, дважды непрерывно дифференцируемой и удовлетворяющей граничным условиям. Но при помощи таких функций можно, очевидно, представить приближённо в среднем любую функцию, интегрируемую с квадратом по области.

Как мы доказали выше (см. лемму 3 на стр. 360), наилучшим приближением в среднем к данной функции служат отрезки ряда Фурье. Поэтому отрезки ряда Фурье тоже позволяют приблизить в среднем любую функцию, интегрируемую с квадратом по области Ω. Значит, каждая функция f, интегрируемая с квадратом по области Ω, разлагается в ряд Фурье по собственным функциям, сходящийся в среднем. Свойство 3 доказано. Отсюда, между прочим, вытекает, что собственных функций $\{U_i\}$ бесконечно много, ибо иначе они не могли бы составлять полную систему.

Докажем теперь свойство 4. Пусть U_i, U_j — две собственные функции. Интегрируя по частям и пользуясь граничными условиями, имеем:

$$\iint\limits_{\Omega}\int\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\frac{\partial U_j}{\partial x}+\frac{\partial U_i}{\partial y}\frac{\partial U_j}{\partial y}+\frac{\partial U_i}{\partial z}\frac{\partial U_j}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=$$

$$=-\iint\limits_{\Omega}\int U_i\,\Delta U_j\,dx\,dy\,dz+\iint\limits_{S} U_i\frac{\partial U_j}{\partial n}dS=$$

$$=\lambda_j\int\limits_{\Omega} U_iU_j\,dx\,dy\,dz, \qquad \text{(XXV.41)}$$

откуда и вытекает доказываемое свойство.

Осталось установить ещё свойство 5. С этой целью рассмотрим интеграл J

$$\iint\limits_{\Omega}\int\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}(\varphi-\varphi_N)\right]^2+\left[\frac{\partial}{\partial y}(\varphi-\varphi_N)\right]^2+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial}{\partial z}(\varphi-\varphi_N)\right]^2\right\}dx\,dy\,dz, \qquad \text{(XXV.42)}$$

где $\varphi_N=\sum\limits_{i=1}^{N}a_iU_i$, а величины a_i суть коэффициенты Фурье функции φ по системе $\{U_i\}$. Раскрывая скобки и интегрируя, подобно тому, как мы поступали при выводе неравенства Бесселя, получим, если воспользоваться ещё свойством 4:

$$J=\iint\limits_{\Omega}\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz-$$

$$-2\sum_{i=1}^{N}a_i\iint\limits_{\Omega}\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial U_i}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial U_i}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial U_i}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz+\sum_{i=1}^{N}\lambda_ia_i^2. \qquad \text{(XXV.43)}$$

Легко доказать равенство

$$\iint\limits_{\Omega}\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial U_i}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial U_i}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial U_i}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\lambda_ia_i.$$

В самом деле, интегрируя по частям, получим:

$$\int\int_{\Omega}\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial U_i}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial U_i}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial U_i}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=$$

$$=-\int\int_{\Omega}\int\varphi\,\Delta U_i\,dx\,dy\,dz=\lambda_i\int\int_{\Omega}\int\varphi U_i\,dx\,dy\,dz=\lambda_i a_i.$$

Таким образом, из (XXV.43) имеем:

$$\int\int_{\Omega}\int\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}(\varphi-\varphi_N)\right]^2+\left[\frac{\partial}{\partial y}(\varphi-\varphi_N)\right]^2+\left[\frac{\partial}{\partial z}(\varphi-\varphi_N)\right]^2\right\}dx\,dy\,dz=$$

$$=\int\int_{\Omega}\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i a_i^2.$$

Левая часть последнего равенства неотрицательна, и мы получаем неравенство, аналогичное неравенству Бесселя:

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i a_i^2\leqslant\int\int_{\Omega}\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz.$$

Это неравенство показывает, что ряд

$$\sum\lambda_i a_i^2$$

сходится. Но отсюда следует сходимость в среднем рядов

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_i\frac{\partial U_i}{\partial x},\quad \sum_{i=1}^{\infty}a_i\frac{\partial U_i}{\partial y},\quad \sum_{i=1}^{\infty}a_i\frac{\partial U_i}{\partial z}.$$

Действительно, рассмотрим интеграл

$$\int\int_{\Omega}\int\left[\left(\sum_{i=n}^{n+p}a_i\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2+\left(\sum_{i=n}^{n+p}a_i\frac{\partial U_i}{\partial y}\right)^2+\left(\sum_{i=n}^{n+p}a_i\frac{\partial U_i}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz.$$

Если мы установим, что этот интеграл будет сколь угодно мал при достаточно большом n и любом p, то отсюда и будет следовать интересующая нас сходимость. Мы можем вычислить этот интеграл непосредственно, пользуясь свойством 4. Это вычисление даёт:

$$\int\int_{\Omega}\int\left[\left(\sum_{i=n}^{n+p} a_i \frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2+\left(\sum_{i=n}^{n+p} a_i \frac{\partial U_i}{\partial y}\right)^2+\left(\sum_{i=n}^{n+p} a_i \frac{\partial U_i}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz=$$

$$=\int\int_{\Omega}\int\left\{\sum_{i=n}^{n+p} a_i^2\left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U_i}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U_i}{\partial z}\right)^2\right]\right\} dx\,dy\,dz+$$

$$+2\sum_{\substack{i,j=n\\ i\neq j}}^{n+p} a_i a_j \int\int_{\Omega}\int\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\frac{\partial U_j}{\partial x}+\frac{\partial U_i}{\partial y}\frac{\partial U_j}{\partial y}+\frac{\partial U_i}{\partial z}\frac{\partial U_j}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz=$$

$$=\sum_{i=n}^{n+p}\lambda_i a_i^2.$$

Из сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_i a_i^2$, по признаку Коши, вытекает произвольная малость последней суммы при достаточно большом n. Мы доказали, что ряды, получаемые почленным дифференцированием по x, y и z ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i U_i(x, y, z),$$

сходятся в среднем.

Для того чтобы закончить доказательство свойства 5, нам остаётся установить ещё одну теорему.

Теорема 8. *Если ряд* $\varphi=\sum\limits_{i=1}^{\infty} v_i$ *с непрерывно дифференцируемыми в области* Ω *членами сходится равномерно, сумма ряда имеет непрерывную частную производную по* x, *а ряд, полученный почленным дифференцированием,*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial v_i}{\partial x}$$

сходится в среднем, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v_i$ *можно почленно дифференцировать, т. е.*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial v_i}{\partial x}, \qquad \text{(XXV.44)}$$

где сходимость, очевидно, понимается как сходимость в среднем.

Доказательство. Пусть ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция переменных x, y, z, отличная от нуля только в некоторой области $\Omega\psi$, лежащей целиком внутри области Ω. Тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\iiint_{\Omega}\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial x}+\chi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx\,dy\,dz=0, \tag{XXV.45}$$

где χ — произвольная функция, обладающая непрерывной производной $\frac{\partial\chi}{\partial x}$.

В частности,

$$\iiint_{\Omega}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx\,dy\,dz=0. \tag{XXV.46}$$

Подставим теперь в формулу (XXV.45) вместо функции χ функцию $\varphi_N=\sum_{i=1}^{N}v_i$. Мы будем иметь:

$$\iiint_{\Omega}\left(\psi\frac{\partial\varphi_N}{\partial x}+\varphi_N\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx\,dy\,dz=0.$$

В этой формуле возможен переход к пределу при $N\to\infty$. Обозначим через φ' сумму ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial v_i}{\partial x}.$$

По предположению теоремы, эта сумма существует. Мы получим:

$$\iiint_{\Omega}\left(\psi\varphi'+\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx\,dy\,dz=0.$$

Вычитая это равенство из (XXV.46), будем иметь:

$$\iiint_{\Omega}\psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\varphi'\right)dx\,dy\,dz=0.$$

Последнее равенство должно иметь место при любой функции, подчиненной только указанным выше требованиям. Отсюда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\varphi'=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial v_i}{\partial x},$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Применение теории интегральных уравнений с симметрическим ядром.

Одним из важнейших применений теории интегральных уравнений с симметрическим ядром служит теория так называемых уравнений Штурма-Лиувилля, т. е. обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(py')' + ry + \lambda\rho(x)y = 0, \tag{XXV.47}$$

зависящих от параметра λ с некоторыми граничными условиями.

Будем искать решение такого уравнения, удовлетворяющее однородным условиям:

$$\begin{aligned} &[py' + \alpha y]_{x=0} = 0, \\ &[py' + \beta y]_{x=1} = 0. \end{aligned} \tag{XXV.48}$$

Предположив, что при $\lambda = 0$ однородная задача имеет лишь тривиальные решения, и применяя формулу Грина, будем иметь

$$y(x_0) = -\int_0^1 \lambda G(x, x_0)\, y(x)\, \rho(x)\, dx. \tag{XXV.49}$$

Ядро $G(x,x_0)$ будет симметрическим в силу того, что оператор L_y и граничные условия самосопряжённые.

Следовательно, собственные функции задачи Штурма-Лиувилля, т. е. функции, удовлетворяющие (XXV.47) и (XXV.48), будут служить собственными функциями интегрального уравнения (XXV.49) с нагруженным симметрическим ядром и будут обладать всеми свойствами собственных функций таких уравнений. Легко установить и обратное: всякое решение уравнения (XXV.49) будет удовлетворять дифференциальному уравнению (XXV.47) и граничным условиям (XXV.48). Проверить это мы предоставим читателям.

В качестве примера более общего уравнения с особенностью рассмотрим уравнение вида

$$(xy')' - \frac{m^2}{x}y + \lambda xy = 0,$$

или

$$xy'' + y' + x\left(\lambda - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Функция Грина для этого уравнения была построена выше [см. (XX.52)]. По отношению к этому уравнению, называемому уравнением *Бесселя*, справедлива вся изложенная теория.

ЛЕКЦИЯ XXVI.

НЕОДНОРОДНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С СИММЕТРИЧЕСКИМ ЯДРОМ.

§ 1. Разложение резольвенты.

В предыдущих лекциях нами было подробно изучено однородное интегральное уравнение типа Фредгольма с симметрическим ядром. В настоящей лекции мы изучим неоднородное уравнение с точки зрения развитой выше теории.

Мы выяснили выше, каким образом можно выразить ядро симметрического интегрального уравнения, зная его собственные значения и собственные функции. Аналогичным образом можно дать представление решения неоднородного уравнения через те же собственные значения и функции.

В самом деле, применим к неоднородному интегральному уравнению с симметрическим ядром теорему Гильберта-Шмидта.

Мы имеем:

$$\mu(P)=f(P)+\lambda\int\limits_{\Omega} K(P,\ P_1)\,\mu(P_1)\,dP_1$$

(для простоты считаем $\rho=1$).

Пусть λ не есть собственное значение. Тогда решение уравнения существует. Найдем выражение этого решения через собственные функции.

Очевидно, что функция $\mu(P)-f(P)$ представима истокообразно через ядро. Следовательно,

$$\mu(P)-f(P)=\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu_i\varphi_i(P)}{\lambda_i}, \tag{XXVI.1}$$

где

$$\mu_i=\int\limits_{\Omega}\mu(P)\,\varphi_i(P)\,dP.$$

С другой стороны, умножая обе части (XXVI.1) на $\varphi_i(P)$ и интегрируя, получим:

$$\mu_i - f_i = \frac{\lambda\mu_i}{\lambda_i},$$

откуда

$$\mu_i = \frac{f_i}{1-\frac{\lambda}{\lambda_i}} = \frac{\lambda_i f_i}{\lambda_i - \lambda}.$$

Следовательно, функция μ, если она существует, представляется в виде

$$\mu(P) = f(P) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(P). \tag{XXVI.2}$$

Если теперь ввести выражение для f_i через фундаментальные функции и заменить ряд пределом его частичной суммы, то получим:

$$\mu(P) = f(P) + \lambda \lim_{N\to\infty} \int_{\Omega} f(P_1) \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(P_1)}{\lambda_i - \lambda} dP_1.$$

Покажем, что полученная формула действительно даёт решение задачи. Для этого удобно ввести новую функцию

$$\Gamma(P, P_1, \lambda)$$

по формуле

$$\Gamma(P, P_1, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(P_1)}{\lambda_i - \lambda}. \tag{XXVI.3}$$

Легко доказать сходимость в среднем написанного ряда для всевозможных λ, не совпадающих ни с одним из λ_i. Для этого заметим, что написанный выше ряд для резольвенты можно представить ещё в иной форме. Имеем:

$$\Gamma(P, P_1, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(P)\varphi_i(P_1)\left[\frac{1}{\lambda_i} + \left(\frac{1}{\lambda_i - \lambda} - \frac{1}{\lambda_i}\right)\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(P_1)}{\lambda_i} + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(P_1)}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)},$$

или

$$\Gamma(P, P', \lambda) = K(P, P') + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\varphi^i(P')}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)} =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(P')}{\lambda_i} + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(P')}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)}, \tag{XXVI.4}$$

где ряд во втором слагаемом сходится равномерно.

Необходимым и достаточным условием равномерной сходимости ряда (XXVI.3) является, очевидно, равномерная сходимость билинейного ряда для ядра.

Примечание. Как мы видим, резольвента интегрального уравнения с симметрическим ядром является мероморфной функцией во всей комплексной плоскости параметра λ. Все полюсы этой функции — простые и являются собственными значениями ядра.

Пользуясь доказанной сходимостью ряда для $\Gamma(P, P_1, \lambda)$, можно переменить порядок суммирования и интегрирования в формуле

$$\mu(P) = f(P) + \lambda \int_{\Omega} \Gamma(P, P_1, \lambda) f(P_1)\, dP_1,$$

имеющей, по доказанному, смысл. Применяя к обеим частям интегральную операцию с ядром $K(P_0, P)$, можно убедиться в том, что $\mu(P)$ действительно удовлетворяет интегральному уравнению

$$\mu(P) = f(P) + \lambda \int_{\Omega} K(P, P_1) \mu(P_1)\, dP_1.$$

§ 2. Представление решения при помощи аналитических функций.

Разложение в ряд Фурье, которое мы рассматривали в предыдущих лекциях (лекция XXIII, § 2), было у нас интерпретировано чисто геометрическим образом, как представление некоторой функции, рассматриваемой в функциональном пространстве в новых координатах, направленных по главным осям линейного оператора.

Пользуясь резольвентой, мы можем подойти к этому вопросу ещё с другой стороны.

Рассмотрим интеграл:

$$\chi(P, \lambda) = -\int_{\Omega} \Gamma(P, P_1, \lambda) f(P_1)\, dP_1 = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i - \lambda}.$$

Этот интеграл представляет собой мероморфную функцию параметра λ с простыми полюсами в точках λ_i. Вычеты в этих полюсах равны $f_i \varphi_i(P)$ и представляют собой последовательные члены ряда Фурье. Ряд Фурье функции f представляет собой сумму вычетов, а отрезок этого ряда — сумму вычетов, относящихся к некоторой части полюсов.

Поэтому можно представить такой отрезок в виде

$$f_n(P) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \chi(P, \lambda)\, d\lambda,$$

где C — контур в плоскости комплексного переменного λ, захватывающий n первых особых точек резольвенты.

Удобно опять перейти к символической записи.

Из формулы (XXVI.2) функцию $\chi(P, \lambda)$ можно выразить в виде

$$\chi(P, \lambda) = -\frac{\mu(P) - f(P)}{\lambda},$$

где $\mu(P)$ — решение уравнения

$$\mu(P) - \lambda \int_{\Omega} K(P, P_1)\,\mu(P_1)\,dP_1 = f(P),$$

т. е. уравнения

$$(E - \lambda A)\,\mu = f.$$

Как мы уже видели ранее, это решение для малых значений λ можно выписать в виде ряда

$$\mu = (E + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \ldots + \lambda^m A^m + \ldots) f,$$

откуда, пользуясь той же символической записью,

$$\chi = -\frac{\mu - f}{\lambda} = -(E - \lambda A)^{-1} Af.$$

При этом

$$f_n(P) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{A}{E - \lambda A} f\,d\lambda. \qquad \text{(XXVI.5)}$$

Мы видели выше аналогию между некоторыми символическими формулами, содержащими многочлены или степенные ряды от оператора A, и соответствующими формулами обычной алгебры и анализа.

Полученная нами интегральная формула (XXVI.5) также является аналогом соответствующей формулы из теории функций. В самом деле, пусть a и f — какие-нибудь числа. Рассмотрим интеграл:

$$\psi = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{a}{1 - \lambda a} f\,d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f}{\frac{1}{a} - \lambda}\,d\lambda. \qquad \text{(XXVI.6)}$$

Очевидно, $\psi = f$, если контур C содержит внутри себя точку $\lambda_0 = \frac{1}{a}$, и $\psi = 0$, если это не так.

Формула (XXVI.5) обобщает формулу (XXVI.6).

Число λ_0 удовлетворяет соотношению

$$\lambda_0 a \varphi_k = \varphi_k, \qquad \text{(XXVI.7)}$$

где φ_k — какое-нибудь число, не равное нулю.

Уравнение (XXVI.7) переходит в уравнение (XXV.1) для определения λ_k, если заменить в нём число a оператором A.

Используем формулу (XXVI.5) для того, чтобы получить новое решение задач математической физики, выраженное в виде определённого интеграла.

Не вдаваясь подробно в теорию этого вопроса, мы разберём пример задачи о распределении тепла, т. е. задачи об интегрировании уравнения

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \text{(XXVI.8)}$$

при условии:

$$u|_S = 0,$$

$$u|_{t=0} = u_0(P).$$

Повторим вкратце рассуждения, обычные в методе Фурье.

Применяя к уравнению формулу Грина, будем иметь:

$$u = -\int_{\Omega} G(P, P_1) \frac{\partial u(P_1)}{\partial t} dP_1$$

или символически

$$u + A\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Частные решения этого уравнения будут:

$$u = e^{-\lambda_i t} u_i(P),$$

где

$$u_i - \lambda_i A u_i = 0.$$

Сумма частных решений, соответствующих различным собственным значениям λ_i, т. е. решение в форме ряда Фурье, будет иметь вид:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} u_i(P). \tag{XXVI.9}$$

Из условия

$$u|_{t=0} = u_0$$

следует, что $u_i(P)$ суть члены ряда Фурье функции u_0, а это значит, что функции u_i являются вычетами в полюсах резольвенты от функции:

$$-\int_{\Omega} \Gamma(P, P_1, \lambda) u_0(P_1) dP_1.$$

При этом $e^{-\lambda_i t} u_i(P)$ суть вычеты в тех же полюсах функции

$$-e^{-\lambda t}\int_{\Omega} \Gamma(P, P_1, \lambda) u_0(P_1) dP_1,$$

и отрезок ряда (XXVI.9) представляется в виде интеграла

$$u_N = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} e^{-\lambda t}\left(\int_{\Omega} \Gamma(P, P_1, \lambda) u_0(P_1) dP_1\right) d\lambda, \tag{XXVI.10}$$

дающего, таким образом, полное решение задачи.

Символически можно записать решение нашей задачи в виде

$$u_N = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} e^{-\lambda t} \frac{A}{E - \lambda A} u_0 \, d\lambda. \tag{XXVI.11}$$

Сравним полученное нами решение с решением обыкновенного уравнения $a\frac{\partial u}{\partial t} + u = 0$, где a — постоянное число.

Очевидно,

$$u = e^{-\frac{1}{a}t} u_0. \tag{XXVI.12}$$

На основании теоремы о вычетах

$$u = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{-\lambda t}\frac{au_0}{1-\lambda a}\,d\lambda.$$

Этот интеграл равен своему вычету в точке $\lambda_0 = \frac{1}{a}$, если λ_0 лежит внутри C, и нулю, если λ_0 — вне этого контура.

На этом основании удобно обозначить символически

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{-\lambda t}\frac{A}{E-\lambda a}f_0\,dt$$

через $e^{-\frac{t}{A}}f_0$.

Решение уравнения (XXVI.8) записывается при этом в виде

$$u = e^{-\frac{t}{A}}u_0. \tag{XXVI.13}$$

Общая теория функций от операторов, развивать которую мы здесь не имеем возможности, позволяет вывести ряд обобщений этой формулы на значительно более широкий класс задач математической физики.

Развитие этой теории даёт возможность применять аналогичные методы решения задач математической физики в ряде случаев, когда особенности резольвенты не являются изолированными точками в плоскости переменного λ.

Эти идеи, в частности, позволяют изучать решение задач математической физики в неограниченных областях или такие задачи, где рассматриваемые уравнения имеют особенности в изучаемой области. Часто появление таких особенностей связано с изменением аналитического характера резольвенты, приводя, в свою очередь, к особенностям резольвенты, не являющимся просто полюсами.

В следующих главах мы не будем углублять этот вопрос, а займёмся конкретным применением метода Фурье в частных задачах математической физики.

Примеры, которые мы будем рассматривать, весьма поучительны, так как именно с них начиналось развитие вопроса.

ЛЕКЦИЯ XXVII.

КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА.

В качестве примера применения метода Фурье рассмотрим, прежде всего, колебания прямоугольного параллелепипеда.

Поставим эту задачу следующим образом.

Будем искать решение уравнения

$$\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(XXVII.1)}$$

в области

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \quad 0 \leqslant z \leqslant c$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = u|_{z=0} = u|_{z=c} = 0 \qquad \text{(XXVII.2)}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = u_0(x, y, z), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x, y, z). \qquad \text{(XXVII.3)}$$

По общей теории [см. § 1 лекции XXIII] решение будет иметь вид:

$$u = \sum U_i(x, y, z)(a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_j t), \qquad \text{(XXVII.4)}$$

где U_i — решения уравнения

$$\Delta U_i + \lambda_i^2 U_i = 0, \qquad \text{(XXVII.5)}$$

удовлетворяющие условиям (XXVII.2). В данном случае эти решения можно выразить в конечном виде через элементарные функции, если воспользоваться приёмом, который называется полным разделением переменных. С этой целью решения уравнения (XXVII.5) мы будем искать в виде

$$U_i(x, y, z) = X_i(x)\, V_i(y, z),$$

где X_i зависит только от x, а V_i от x не зависит. Для определения функций X_i и V_i мы получим

$$V_i X_i + X_i\left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2}\right) + \lambda_i^2 X_i Y_i = 0,$$

или

$$\frac{X_i''}{X_i} = \frac{\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2}}{V_i} + \lambda_i^2 = 0.$$

Очевидно, что

$$\frac{X_i''}{X_i} = -\varkappa_i^2, \qquad \frac{\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2}}{V_i} = -\tau_i^2,$$

где $\varkappa_i$ и τ_i — постоянные, связанные соотношением

$$\varkappa_i^2 + \tau_i^2 = \lambda_i^2.$$

Уравнение

$$X_i'' + \varkappa_i^2 X_i = 0 \qquad \text{(XXVII.6)}$$

имеет при условиях (XXVII.2) собственными значениями числа

$$\varkappa_i = \frac{k_i \pi}{a},$$

где k_i — целые числа.

Функция

$$X_i = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{k_i \pi x}{a}$$

удовлетворяет уравнению (XXVII.6), граничным условиям при $x = 0$ и при $x = a$. Система решений $\{X_i\}$ является ортогональной нормированной системой функций.

Рассматривая уравнение

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z_i^2} = \tau_i^2 V_i = 0,$$

опять ищем его решение в виде

$$V_i = Y_i(y) Z_i(z),$$

где Y_i зависит только от y, а Z_i — только от z. Мы будем иметь:

$$\frac{Y_i''}{Y_i} + \frac{Z_i''}{Z_i} + \tau_i^2 = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{Y_i''}{Y_i} = -\sigma_i^2, \quad \frac{Z_i''}{Z_i} = -\mu_i^2,$$

где σ_i и μ_i — постоянные, удовлетворяющие соотношению

$$\sigma_i^2 + \mu_i^2 = \tau_i^2.$$

Уравнение

$$Y_i'' = \sigma_i^2 Y_i = 0$$

имеет собственные значения

$$\sigma_i = \frac{l_i \pi}{b},$$

где l_i — целые числа, и собственные функции

$$Y_i = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{\pi l_i}{b} y,$$

а уравнение

$$Z_i'' + \mu_i^2 Z_i = 0$$

имеет собственные значения

$$\mu_i = \frac{m_i \pi}{c},$$

где m_i — целые числа, и собственные функции

$$Z_i = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin \frac{\pi m_i}{c} z.$$

Окончательно получим множество собственных функций колебания параллелепипеда вида

$$U_i = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{\pi k_i x}{a} \sin \frac{\pi l_i y}{b} \sin \frac{\pi m_i z}{c}. \qquad \text{(XXVII.7)}$$

Эти собственные функции отвечают следующим собственным значениям уравнения (XXVII.5) при граничных условиях (XXVII.2):

$$\lambda_i^2 = \pi^2 \left(\frac{k_i^2}{a^2} + \frac{l_i^2}{b^2} + \frac{m_i^2}{c^2} \right), \qquad \text{(XXVII.8)}$$

где k_i, l_i, m_i пробегают всевозможные тройки целых чисел. Заметим, что числа λ_i могут повторяться, т. е. может оказаться, что

$$\lambda_i = \lambda_{i+1} = \ldots = \lambda_{i+k}.$$

Число равных между собой собственных чисел λ_i равно числу решений в целых числах уравнения (XXVII.8) относительно k_i, l_i, m_i.

Можно доказать, что других собственных значений или собственных функций уравнение (XXVII.5) при условиях (XXVII.2) не имеет. Для этого установим следующую лемму.

Лемма 1. *Всякая функция $\varphi(x, y, z)$, удовлетворяющая условиям* (XXVII.2) *и имеющая непрерывные вторые производные*[1], *представима сходящимся рядом*:

$$\varphi(x, y, z) =$$
$$= \sqrt{\frac{8}{abc}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{\pi kx}{a} \left[\sum_{l=1}^{\infty} \sin\frac{\pi ly}{b} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{k,l,m} \sin\frac{\pi mz}{c} \right) \right], \qquad \text{(XXVII.9)}$$

причём ряды

$$\varphi_{k,l}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{k,l,m} \sin\frac{\pi mz}{c},$$

$$\varphi_k(y, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{k,l}(z) \sin\frac{\pi ly}{b},$$

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_k(y, z) \sin\frac{\pi kx}{a}$$

сходятся равномерно по аргументам, стоящим под знаком синуса. Здесь

$$\varphi_{k,l,m} =$$
$$= \sqrt{\frac{8}{abc}} \int_0^a \int_0^b \int_0^c \varphi(x, y, z) \sin\frac{\pi kx}{a} \sin\frac{\pi ly}{b} \sin\frac{\pi mz}{c}\, dx\, dy\, dz. \qquad \text{(XXVII.10)}$$

Будем сначала рассматривать $\varphi(x, y, z)$ как функцию переменного x с параметрами y и z. В силу того что для уравнения (XXVII.6) и данных краевых условий построена функция Грина [см. § 3 (XX)], пользуясь теоремой Гильберта-Шмидта, можно функцию $\varphi(x, y, z)$ представить в виде равномерно сходящегося ряда относительно x по собственным функциям уравнения (XXVII.6), т. е.

$$\varphi(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(y, z) \sin\frac{k\pi x}{a},$$

где

$$\varphi_k(y, z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \varphi(x_1, y, z) \sin\frac{k\pi x_1}{a}\, dx_1. \qquad \text{(XXVII.11)}$$

---

[1]) Вторые производные мы здесь требуем лишь потому, что ссылаемся на теорему о разложении по собственным функциям.

Из формулы (XXVII.11) видно, что $\varphi_k(y, z)$ есть непрерывная функция y, z, допускающая вторые производные и удовлетворяющая по этим переменным условиям (XXVII.2). Следовательно, $\varphi_k(y, z)$ представима равномерно сходящимся рядом относительно y:

$$\varphi_k(y, z) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{k,\,l}(z) \sin\frac{\pi l y}{b},$$

где

$$\varphi_{k,l}(z) = \sqrt{\frac{2}{b}} \int_0^b \varphi_k(y_1, z) \sin\frac{\pi l y_1}{b}\, dy_1.$$

Наконец, $\varphi_{k,l}(z)$ может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по переменному z:

$$\varphi_{k,l}(z) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{k,\,l,\,m} \sin\frac{\pi m z}{c},$$

где

$$\varphi_{k,l,m} = \sqrt{\frac{2}{c}} \int_0^c \varphi_{k,\,l}(z_1) \sin\frac{\pi m z_1}{b}\, dz_1.$$

Сопоставляя формулы для $\varphi_k(y, z)$, $\varphi_{k,\,l}(z)$ и $\varphi_{k,\,l,\,m}$ и ряды для $\varphi(x, y, z)$, $\varphi_k(y, z)$ и $\varphi_{k,\,l,\,m}$, сразу получим утверждения леммы.

Пусть теперь U_0 — какая-нибудь собственная функция уравнения (XXVII.5) при условиях (XXVII.2). По доказанному в лекции (XXIV), её можно считать ортогональной ко всем функциям (XXVII.7). Согласно лемме её можно разложить в ряд (XXVII.9). Из формулы (XXVII.10) следует, что все коэффициенты такого разложения будут равны нулю. Формула (XXVII.9) даёт при этом

$$U_0 = 0.$$

Следовательно, никаких собственных функций, отличных от (XXVII.7), наша задача иметь не может.

Точно так же, как мы рассмотрели условие (XXVII.2), мы могли бы рассмотреть условия другого типа, например,

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_S = 0, \qquad \text{(XXVII.12)}$$

где α и β принимают постоянные значения на каждой из граней.

На основании общей теории, изложенной выше, мы заключаем, что поставленная задача полностью решается методом Фурье, так что мы можем удовлетворить всем начальным и граничным условиям, подбирая соответственно коэффициенты разложения решения в ряд по собственным функциям (XXVII.7).

Колебания прямоугольной мембраны изучаются тем же способом, как и колебания параллелепипеда.

Полезно обратить внимание на следующее обстоятельство. Пусть в формуле (XXVII.12) коэффициенты α и β непостоянные. Тогда разложение собственных функций U_i в произведение $X_i Y_i Z_i$, вообще говоря, может и не иметь места. Возникает вопрос: можеть быть, возможно сделать какую-либо замену независимых переменных, введя вместо x, y, z новые координаты t_1, t_2, t_3 так, чтобы подобное представление оказалось возможным? Координаты, в которых для данной задачи математической физики возможно провести разделение переменных, называются иногда нормальными координатами. Мы можем поставить вопрос: существуют ли нормальные координаты для данной задачи и если существуют, то как их найти?

Для некоторых специальных задач математической физики мы укажем в следующей лекции такие нормальные координаты. Как доказал В. В. Степанов, нормальные координаты существуют в очень ограниченном классе задач.

ЛЕКЦИЯ XXVIII.

УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ФУРЬЕ.

§ 1. Уравнение Лапласа в криволинейных координатах.

В математической физике часто рассматриваются различные криволинейные координаты: полярные, цилиндрические и т. п. Рассмотрим, как будет выглядеть в таких переменных уравнение Лапласа.

Пусть t_1, t_2, t_3 будут эти криволинейные координаты, связанные с x, y, z формулами:

$$t_1 = t_1(x, y, z), \quad t_2 = t_2(x, y, z), \quad t_3 = t_3(x, y, z),$$
$$x = x(t_1, t_2, t_3), \quad y = y(t_1, t_2, t_3), \quad z = z(t_1, t_2, t_3).$$

Рассмотрим две какие-либо кривые

$$x_1(s_1), \; y_1(s_1), \; z_1(s_1);$$

$$x_2(s_2), \; y_2(s_2), \; z_2(s_2),$$

проходящие через одну и ту же точку. Косинус угла между ними, как извѣстно из дифференциальной геометрии, определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{dx_1}{ds_1}\frac{dx_2}{ds_2} + \frac{dy_1}{ds_1}\frac{dy_2}{ds_2} + \frac{dz_1}{ds_1}\frac{dz_2}{ds_2}.$$

В новых координатах эта формула примет вид

$$\cos\varphi = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial x}{\partial t_i}\frac{\partial x}{\partial t_j} + \frac{\partial y}{\partial t_i}\frac{\partial y}{\partial t_j} + \frac{\partial z}{\partial t_i}\frac{\partial z}{\partial t_j}\right)\frac{dt_i^{(1)}}{ds_1}\frac{dt_j^{(2)}}{ds_2} =$$
$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}\frac{dt_i^{(1)}}{ds_1}\frac{dt_j^{(2)}}{ds_2},$$

или

$$\cos\varphi\, ds_1\, ds_2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij} dt_i^{(1)}\, dt_j^{(2)}, \qquad \text{(XXVIII.1)}$$

где $dt_i^{(1)}$ и $dt_j^{(2)}$ — дифференциалы, взятые соответственно вдоль каждой из рассматриваемых линий.

Заметим, что

$$\alpha_{ij}=\alpha_{ji}=\frac{\partial x}{\partial t_i}\frac{\partial x}{\partial t_j}+\frac{\partial y}{\partial t_i}\frac{\partial y}{\partial t_j}+\frac{\partial z}{\partial t_i}\frac{\partial z}{\partial t_j}.$$

Если обе линии совпадают, то формула (XXVIII.1) примет вид

$$ds^2=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}\,dt_i\,dt_j. \qquad \text{(XXVIII.2)}$$

Для вывода уравнения Лапласа, как и во многих других вопросах, связанных с криволинейными координатами, удобно представить все формулы через коэффициенты α_{ij}.

Если система координат t_1, t_2, t_3 ортогональная, т. е. если координатные линии образуют между собой прямые углы, то все $\alpha_{ij}=0$ при $i\neq j$. В самом деле, определим по формуле (XXVIII.1) угол между двумя координатными линиями. На одной из координатных линий лишь $dt_i^{(1)}\neq 0$, на другой лишь $dt_j^{(2)}\neq 0$, $i\neq j$, тогда среди произведений $dt_i^{(1)}dt_j^{(2)}$ в формуле (XXVIII.1) будет лишь один член, не равный нулю. Но по условию $\cos\varphi=0$, следовательно, $\alpha_{ij}=$ $=0$. Ограничиваясь случаем ортогональности, положим:

$$\alpha_{ij}=\begin{cases} h_i^2, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

При этом

$$ds^2=h_1^2\,dt_1^2+h_2^2\,dt_2^2+h_3^2\,dt_3^2.$$

Примеры.

1. Для полярных координат в пространстве

$$x=r\cos\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta,$$

откуда

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2.$$

2. Для цилиндрических координат получим:

$$x=r\cdot\cos\varphi,\quad y=r\cdot\sin\varphi,\quad z=z,$$

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=dr^2+r^2\,d\varphi^2+dz^2.$$

Полезно вычислить определитель преобразования $\frac{D(x,y,z)}{D(t_1,t_2,t_3)}$ через те же величины h_1, h_2 и h_3. Для этого мы введём ещё одну промежуточную систему координат x_1, y_1, z_1, которая отличается только поворотом осей от x, y, z. Направления x_1, y_1, z_1 мы выберем таким образом, чтобы в данной точке x, y, z они совпадали соответственно с направлениями t_1, t_2, t_3. При этом в рассматриваемой точке имеем:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_1, y_1, z_1)} \frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} = \pm\frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(t_1, t_2, t_3)},$$

ибо в этой точке $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_1, y_1, z_1)} = \pm 1$, причем знак определяется в зависимости от ориентации системы координат (x_1, y_1, z_1).

Отсюда

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} = \pm\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_1}{\partial t_3} \\ \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} & \frac{\partial y_1}{\partial t_3} \\ \frac{\partial z_1}{\partial t_1} & \frac{\partial z_1}{\partial t_2} & \frac{\partial z_1}{\partial t_3} \end{vmatrix},$$

Но в определителе $\frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(t_1, t_2, t_3)}$ все члены, кроме тех, которые стоят на главной диагонали, равны нулю и, значит,

$$\frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} = \frac{\partial x_1}{\partial t_1}\frac{\partial y_1}{\partial t_2}\frac{\partial z_1}{\partial t_3}.$$

Далее, на оси x_1, и на всякой кривой, касательной к x_1 в нашей точке, имеем:

$$dx_1^2 = ds^2 = h_1^2\, dt_1^2,$$

на оси y_1 и на кривой, касательной к ней, аналогично:

$$dy_1^2 = ds^2 = h_2^2\, dt_2^2,$$

и, наконец, на оси z_1 и на кривых, касательных к оси z_1:

$$dz_1^2 = ds^2 = h_3^2\, dt_3^2,$$

откуда

$$\begin{aligned} &\frac{\partial t_1}{\partial x_1} = \pm\frac{1}{h_1}, && \frac{\partial t_2}{\partial x_1} = 0, && \frac{\partial t_3}{\partial x_1} = 0; \\ &\frac{\partial t_1}{\partial y_1} = 0, && \frac{\partial t_2}{\partial y_1} = \pm\frac{1}{h_2}, && \frac{\partial t_3}{\partial y_1} = 0; \\ &\frac{\partial t_1}{\partial z_1} = 0, && \frac{\partial t_2}{\partial z_1} = 0, && \frac{\partial t_3}{\partial z_1} = \pm\frac{1}{h_3} \end{aligned} \tag{XXVIII.3}$$

и

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x_1}{\partial t_1} = \pm h_1, && \frac{\partial x_2}{\partial t_2} = 0, && \frac{\partial x_3}{\partial t_3} = 0; \\ &\frac{\partial y_1}{\partial t_1} = 0, && \frac{\partial y_2}{\partial t_2} = \pm h_2, && \frac{\partial y_3}{\partial t_3} = 0; \\ &\frac{\partial z_1}{\partial t_1} = 0, && \frac{\partial z_2}{\partial t_2} = 0, && \frac{\partial z_3}{\partial t_3} = \pm h_3; \end{aligned}$$

окончательно получим:

$$\frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} = \pm h_1 h_2 h_3,$$

причём знак определяется ориентацией систем координат (x_1, y_1, z_1) и (t_1, t_2, t_3).

Мы видели выше, что если операторы L и M взаимно сопряжены, то справедливо интегральное соотношение

$$\iiint\limits_{\Omega} (uLv - vMu)\, d\Omega = \iint\limits_{S} [uP(v) - vQ(u)]\, dS,$$

где Ω — некоторый объём, ограниченный гладкой поверхностью S, а $P(v)$, $Q(u)$ — линейные комбинации производных от функций v, u с коэффициентами, не зависящими от v и u.

Если одна из функций, например v, обращается в нуль вне некоторой области Ω_v, целиком вместе со своей границей, лежащей внутри области Ω, то в этом тождестве поверхностный интеграл исчезнет и мы получим:

$$\iiint\limits_{\Omega} (uLv - vMu)\, d\Omega = 0.$$

Это последнее соотношение можно принять за определение оператора Mu, если потребовать, чтобы оно выполнялось при произвольной функции u и любой функции v, отличной от нуля лишь в некоторой внутренней области Ω_v.

Прежде чем вычислить выражение для оператора Лапласа в криволинейных координатах, докажем лемму.

Лемма 1. *Если некоторый оператор 2-го порядка является самосопряжённым, то он обязательно представляется в виде*

$$Lu = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + cu, \qquad \text{(XXVIII.4)}$$

причём $A_{ij} = A_{ji}$.

Заметим, что оператор вида (XXVIII.4) является самосопряжённым. Это сразу следует из определения самосопряжённости оператора [см. § 2 (V)].

Докажем теперь обратное утверждение, выраженное в лемме.

Убедимся сначала, что сопряжённый оператор к данному может быть лишь один. В самом деле, пусть M_1 и M_2 — два оператора, сопряжённых оператору L, и пусть v — функция, везде равная нулю, кроме области Ω_1, внутренней по отношению к Ω; тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} (uLv - vM_1u)\, d\Omega = 0$$

и

$$\iiint\limits_{\Omega} (uLv - vM_2u)\, d\Omega = 0$$

для любой функции u. Вычитая, мы получим:

$$\iiint\limits_{\Omega} v\,(M_1 - M_2)\,u\,d\Omega = 0.$$

Но функция v — произвольная в области Ω_v. Поэтому $(M_1 - M_2)\,u = 0$, и, следовательно, операторы M_1 и M_2 тождественны.

Если L имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial t_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}B_i\frac{\partial u}{\partial t_i}+cu,$$

то сопряжённый с ним будет оператор вида

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t_i}\left(A_{ji}\frac{\partial u}{\partial t_j}\right)-\sum_{i=1}^{n}B_i\frac{\partial u}{\partial t_i}+cu,$$

и они могут быть равны только, если $B_i = 0$ и $A_{ij} = A_{ji}$. Наша лемма доказана.

В переменных t_1, t_2, t_3 оператор Лапласа Δ не будет самосопряжённым. Однако его легко выразить через такой оператор. В самом деле, для любой пары функций u и v, выбранных так же, как при доказательстве леммы, имеем:

$$\iiint\limits_{\Omega}(u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dx\,dy\,dz = 0,$$

или, переходя к новым переменным:

$$\iiint\limits_{\Omega}(u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,h_1h_2h_3\,dt_1\,dt_2\,dt_3 = 0,$$

так как, по доказанному выше, якобиан $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t_1, t_2, t_3)}$ лишь знаком может отличаться от величины $h_1h_2h_3$.

Значит, оператор

$$Lu = h_1h_2h_3\Delta u$$

будет уже самосопряжённым.

Если

$$Lu = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial t_1}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial t_j}\right)$$

(очевидно, что сама функция не может войти ни в Δ ни в L), то

$$\Delta u = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial t_i}\left(\sum_{j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial t_j}\right). \qquad \text{(XXVIII.5)}$$

Коэффициенты β_{ij} при вторых производных в выражении (XXVIII.5) будут, как легко видеть, равны $\frac{A_{ij}}{h_1 h_2 h_3}$.

С другой стороны, β_{ij} можно определить непосредственно. Заменим сначала переменные на x_1, y_1, z_1; при этом Δu не изменится, так как оператор Лапласа инвариантен относительно линейного ортогонального преобразования переменных. Теперь, пользуясь формулами (XXVIII.3), получим:

$$B_{ij} = \frac{\partial t_i}{\partial x_1}\frac{\partial t_j}{\partial x_1} + \frac{\partial t_i}{\partial y_1}\frac{\partial t_j}{\partial y_1} + \frac{\partial t_i}{\partial z_1}\frac{\partial t_j}{\partial z_1} = \begin{cases} \frac{1}{h_i^2}, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Отсюда имеем:

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

т. е.

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right) + \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right) + \frac{\partial}{\partial t_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial t_3}\right)\right]. \quad \text{(XXVIII.6)}$$

В полярных координатах, где $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r\sin\theta$, получим:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}. \quad \text{(XXVIII.7)}$$

В цилиндрических координатах будем иметь:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1;$$

$$\Delta u = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad \text{(XXVIII.8)}$$

§ 2. Функции Бесселя.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0. \quad \text{(XXVIII.9)}$$

Это уравнение носит название уравнения Бесселя. В курсах аналитической теории дифференциальных уравнений и в курсах теории специальных функций устанавливается ряд важных свойств решений этого уравнения, которые мы дадим без доказательства. Желающие могут познакомиться с доказательством этих свойств хотя бы по книге Уиттекера и Ватсона «Курс современного анализа», т. II, или Гильберт и Курант «Методы математической физики», т. I.

Мы рассмотрим уравнение (XXVIII.9) отдельно для целых и нецелых значений ν.

Справедливы следующие утверждения:

1. Для нецелых значений ν уравнение (XXVIII.9) имеет два линейно независимых интеграла:

$$J_\nu(x) \quad \text{и} \quad J_{-\nu}(x),$$

разложимых в равномерно сходящиеся на всей плоскости комплексного переменного x ряды:

$$J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}}{\Gamma(s+1)\,\Gamma(\nu+s+1)},$$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2s}}{\Gamma(s+1)\,\Gamma(-\nu+s+1)}.$$

Иными словами, $x^{-\nu}J_\nu(x)$ и $x^\nu J_{-\nu}(x)$ суть целые функции от x. Функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ называются соответственно бесселевыми функциями порядка ν и $-\nu$; их линейная комбинация

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

носит название функции Неймана.

2. Для целых значений $\nu = m$ определённые выше функции Бесселя порядка m и порядка $-m$ уже не будут независимыми:

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x).$$

При этом за линейно независимые решения уравнения (XXVIII.7) можно взять две функции:

$$J_m(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2s}}{\Gamma(s+1)\,\Gamma(m+s+1)}, \qquad \text{(XXVIII.10)}$$

$$N_m(x) = \frac{2}{\pi} J_m(x)\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{m-1} \frac{(m-s-1)!}{\Gamma(s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2s} -$$
$$- \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^m \frac{1}{m!}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \ldots + 1\right) -$$
$$- \frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^s}{\Gamma(s+1)\,\Gamma(m+s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+m} \times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{m+s} + \frac{1}{m+s-1} + \ldots + 1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \ldots + 1\right)\right],$$

где $C = 0{,}577215\ldots$ — эйлерова постоянная.

Как видно из формул (XXVIII. 10), функция Бесселя $J_m(x)$ есть целая функция своего аргумента вместе с $x^{-m}J_m(x)$. Функция же $N_m(x)$, называемая функцией Неймана и являющаяся пределом для функции $N_\nu(x)$ при $\nu \to m$, имеет в начале координат особенность в виде точки ветвления, соединённой с полюсом.

3. Для чисто мнимых значений аргумента ($x = it$) функция

$$i^{-m}J_m(x) = i^{-m}J_m(it) = I_m(t),$$

являющаяся решением уравнения Бесселя относительно переменного x, будет вещественной.

Другое решение уравнения (XXVIII.9), вещественное для мнимых значений x, имеет вид:

$$i^{-m}\left[N_m(x) - \frac{i\pi}{2}J_m(x)\right] = i^{-m}\left[N_m(it) - \frac{i\pi}{2}J_m(it)\right].$$

4. Линейные комбинации

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x),$$
$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x)$$

носят название функций Ганкеля 1-го или 2-го рода. Эти функции, являющиеся, очевидно, решениями уравнения Бесселя (хотя и комплексными при вещественных значениях x), имеют следующие асимптотические выражения для больших вещественных значений x, годные как для целых, так и для дробных ν:

$$\left.\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\left[1 + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)\right], \\ H_\nu^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\left[1 + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \quad \text{(XXVIII. 11)}$$

(Равенство $f(x) = O(\varphi(x))$ означает, что отношение $\frac{f(x)}{|\varphi(x)|}$ остаётся ограниченным при $x \to \infty$.)

Для $H_\nu^{(1)}(x)$ это представление годится для больших x, удовлетворяющих условию

$$\left|\arg x - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{3\pi}{2},$$

а для $H_\nu^{(2)}(x)$ — для больших значений x, удовлетворяющих условию

$$\left|\arg x + \frac{\pi}{2}\right| < \frac{3\pi}{2}.$$

Из формул (XXVIII.11) получаются следующие асимптотические выражения для функций Бесселя и Неймана:

$$\left.\begin{aligned} J_\nu(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right), \\ N_\nu(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right). \end{aligned}\right\} \quad (\text{XXVIII}.12)$$

Формулы (XXVIII.12) показывают, как ведут себя функции Бесселя и Неймана при возрастании аргумента. Это — колеблющиеся функции, бесчисленное множество раз проходящие через нуль. Амплитуда их колебаний постепенно затухает. Корни функций Бесселя и Неймана с одинаковым значком перемежаются. Функция $I_n(z)$ для вещественных больших значений z имеет представление:

$$I_n(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left\{1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right\}.$$

Элементарно можно получить уравнение, которому удовлетворяет функция $I_n(z)$:

$$\frac{d^2 I_n(z)}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dI_n(z)}{dz} - \left(1 + \frac{n^2}{z^2}\right) I_n(z) = 0.$$

Эта функция часто встречается в приложениях.

Обычно в таблицах даются только значения функций $J_0(z)$ и $J_1(z)$. Между функциями $J_n(z)$ для разных n существуют соотношения, позволяющие выразить при целом n любую функцию $J_n(z)$ и её производную через эти две основные функции:

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z), \quad J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J_n'(z).$$

§ 3. Полное разделение переменных в уравнении $\Delta u = 0$ в полярных координатах.

Рассмотрим волновое уравнение на плоскости:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Пусть мы изучаем колебания круглой мембраны $r \leqslant 1$ с граничным условием

$$u|_{r=1} = 0 \qquad (\text{XXVIII}.13)$$

и начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1.$$

Переходя к переменным r и φ по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, преобразуем это уравнение к виду:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad \text{(XXVIII.14)}$$

[см. (XXVIII.8)].

Решение (XXVIII.14) будем искать в виде

$$u=\sum_{i=1}^{\infty} v_i(r,\ \varphi)\,(a_i\cos\lambda_i t+b_i\sin\lambda_i t),$$

где v_i есть решение уравнения

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_i}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_i}{\partial\varphi^2}+\lambda_i^2 v_i=0. \qquad \text{(XXVIII.15)}$$

Покажем, что r и φ являются нормальными координатами нашей задачи.

Ищем решение v_i опять в виде произведения

$$v_i=\Phi_i(\varphi)\,R_i(r). \qquad \text{(XXVIII.16)}$$

Как мы установим позднее, такие решения существуют. Подставляя (XXVIII.16) в уравнение (XXVIII.15), получим:

$$\frac{\Phi_i}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_i}{dr}\right)+\frac{1}{r^2}R_i\frac{d^2\Phi_i}{d\varphi^2}+\lambda_i^2 R_i\Phi_i=0$$

или, деля на $R_i\Phi_i$ и умножая на r^2:

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR_i}{dr}\right)}{R_i}+\frac{\dfrac{d^2\Phi_i}{d\varphi^2}}{\Phi_i}+\lambda_i^2 r^2=0,$$

т. е.

$$-\frac{\dfrac{d^2\Phi_i}{d\varphi^2}}{\Phi_i}=\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR_i}{dr}\right)}{R_i}+r^2\lambda_i^2.$$

Приравнивая обе части постоянной m_i^2, имеем два уравнения:

$$\Phi_i''+m_i^2\Phi_i=0, \qquad \text{(XXVIII.17)}$$

$$r\,(rR_i')'-(m_i^2-r^2\lambda_i^2)\,R_i=0. \qquad \text{(XXVIII.18)}$$

Решение уравнения (XXVIII.17) должно обладать периодом 2π для того, чтобы иметь определённый физический смысл. При этом, очевидно, m_i должно быть вещественным и целым. Тогда

$$\Phi_i^{(1)}=\cos m_i\varphi, \qquad \Phi_i^{(2)}=\sin m_i\varphi.$$

Уравнение (XXVIII.18) преобразуем к самосопряжённому виду:

$$(rR_i')' - \left(\frac{m_i^2}{r} - \lambda_i^2 r\right) R_i = 0. \qquad \text{(XXVIII.19)}$$

В таком виде уравнение для R_i есть самосопряжённое уравнение 2-го порядка. Мы будем искать то его решение, которое обращается в нуль при $r = 1$ и остаётся ограниченным при $r = 0$. По общей теории (см. лекция XX, пример, и лекцию XXV, § 4) такое решение существует для некоторого множества значений λ_i^2.

Лемма 1. *Фундаментальные функции уравнения* (XXVIII.19), *удовлетворяющие указанным граничным условиям, ортогональны с весом* r[1]):

$$\int_0^1 R_i(r) R_j(r)\, r\, dr = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

В самом деле, пусть

$$LR_i \equiv (rR_i')' - \frac{m_i^2}{r} R_i = -\lambda_i^2 r R_i;$$

тогда

$$\int_0^1 [R_j L R_i - R_i L R_j]\, dr = (\lambda_j^2 - \lambda_i^2) \int_0^1 r R_j R_i\, dr.$$

Но интеграл в левой части тождества равен нулю, значит, и интеграл справа равен нулю, что и требовалось доказать.

Сделаем подстановку:

$$\lambda_i r = \rho,$$

тогда

$$\frac{d}{dr} = \lambda_i \frac{d}{d\rho},$$

и уравнение (XXVIII.19) переписывается так:

$$\lambda_i \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR_i}{d\rho}\right) - \left(\frac{m_i^2 \lambda_i}{\rho} - \lambda_i \rho\right) R_i = 0,$$

или

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR_i}{d\rho}\right) - \left(\frac{m_i^2}{\rho} - \rho\right) R_i = 0. \qquad \text{(XXVIII.20)}$$

Обозначая R_i через y, имеем:

$$y'' + \frac{1}{\rho} y' + \left(1 - \frac{m_i^2}{\rho}\right) y = 0.$$

Мы видим, что задача свелась к уравнению Бесселя, о котором шла речь выше.

---

[1]) Лемма следует из общей теории, однако, её доказательство приводится вторично. Лемма имеет место для более общего условия при $r = 1$, а именно $(\alpha R_i + \beta R_i')|_{r=1} = 0$.

Естественно, что мы должны взять за R регулярное решение уравнения (XXVIII.20), т. е.

$$R_i(r) = J_{m_i}(\lambda_i r).$$

Значение λ_i мы получим из граничного условия (XXVIII.13). Мы имеем:

$$R_i(1) = J_{m_i}(\lambda_i) = 0. \tag{XXVIII.21}$$

Как и следовало ожидать, это уравнение имеет бесконечное множество решений, что с очевидностью следует из асимптотического представления для бесселевой функции (XXVIII.12).

Мы получаем, таким образом, систему решений нашей краевой задачи в виде

$$c_i \cos(m_i\varphi) J_{m_i}(\lambda_i r) \quad d_i \sin(m_i\varphi) J_{m_i}(\lambda_i r) \tag{XXVIII.22}$$

с собственными значениями λ_i^2, где c_i и d_i — некоторые постоянные, определяемые из условия нормировки. Все эти решения ортогональны между собою. Легко доказать, как и в случае колебаний прямоугольного параллелепипеда, что функции (XXVIII.22), в которых пары чисел m_i и λ_i суть всевозможные пары, удовлетворяющие уравнению (XXVIII.21), дают все собственные функции задачи. Для доказательства установим сначала лемму.

Лемма 2. *Произвольная функция* $\omega(r, \varphi)$, *имеющая непрерывные производные до второго порядка включительно, удовлетворяющая граничному условию* (XXVIII.13), *может быть представлена сходящимся рядом вида*

$$\omega(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{mk} \cos m\varphi + \beta_{mk} \sin m\varphi) J_m(\lambda_k^{(m)} r), \tag{XXVIII.23}$$

где

$$\alpha_{mk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \omega(r, \varphi) \cos m\varphi J_m(\lambda_k^{(m)} r)\, r\, dr\, d\varphi,$$

$$\beta_{mk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \omega(r, \varphi) \sin m\varphi J_m(\lambda_k^{(m)} r)\, r\, dr\, d\varphi.$$

Прежде всего $\omega(r, \varphi)$ как периодическая функция представима в виде

$$\omega(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} [a_m(r) \cos m\varphi + b_m(r) \sin m\varphi], \tag{XXVIII.24}$$

где

$$a_m(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \omega(r, \varphi) \cos m\varphi\, d\varphi, \qquad b_m(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \omega(r, \varphi) \sin m\varphi\, d\varphi.$$

Коэффициенты $a_m(r)$ имеют непрерывные вторые производные и удовлетворяют краевому условию (XXVIII.13) и должны оставаться ограниченными при $r=0$, поэтому могут быть разложены в равномерно сходящиеся ряды по собственным функциям самосопряжённого уравнения (XXVIII.20), т. е. по функциям $J_m(\lambda_k^{(m)}r)$ (см. пример лекции XX и лекцию XXV):

$$a_m(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{mk}J_m(\lambda_k^{(m)}r), \tag{XXVIII.25}$$

где

$$\alpha_{mk}=\frac{\int\limits_0^1 a_m(r)\,J_m(\lambda_k^{(m)}r)\,r\,dr}{\left\{\int\limits_0^1 [J_m(\lambda_k^{(m)}r)]^2\,r\,dr\right\}^{\frac{1}{2}}}. \tag{XXVIII.26}$$

Аналогично

$$b_m(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{mk}J_m(\lambda_k^{(m)}r), \tag{XXVIII.27}$$

где

$$\beta_{mk}=\frac{\int\limits_0^1 b_m(r)\,J_m(\lambda_k^{(m)}r)\,r\,dr}{\left\{\int\limits_0^1 [J_m(\lambda_k^{(m)}r)]^2\,r\,dr\right\}^{\frac{1}{2}}}. \tag{XXVIII.28}$$

Сопоставляя (XXVIII.25), (XXVIII.26), (XXVIII.27) и (XXVIII.28), получим утверждение леммы, причём ряд (XXVIII.24) равномерно сходится относительно φ, а ряды (XXVIII.25) и (XXVIII.27) равномерно сходятся относительно r.

Из леммы 2 сразу следует, что других собственных функций, кроме найденных, наша задача иметь не может, ибо каждая такая собственная функция представлялась бы рядом (XXVIII.23) с коэффициентами, равными нулю, и должна, следовательно, равняться нулю.

Задача о колебании мембраны решена тем самым до конца.

ЛЕКЦИЯ XXIX.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ И СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.

§ 1. Определение сферических функций.

Прежде чем переходить к дальнейшим приложениям метода Фурье, мы займёмся ещё одним важным вопросом. Рассмотрим уравнение Лапласа с тремя переменными:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

и поставим себе целью найти те решения этого уравнения, которые имеют вид однородных многочленов степени n относительно x, y и z.

В плоском случае такие однородные решения уравнения Лапласа имеют, как легко проверить, вид

$$(x+iy)^n, \quad (x-iy)^n.$$

Будем искать решение задачи в виде

$$v=(x+iy)^m \sum_{j=0}^{\frac{n-m}{2}} a_j \rho^{2j} z^{n-m-2j}=(x+iy)^m f(\rho^2, z)\,^{1)}$$

$$(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad \text{(XXIX.1)}$$

где

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}.$$

---

[1]) Суммирование ведётся от $j=0$ до $j=\mathrm{E}\left(\frac{n-m}{2}\right)$, где $\mathrm{E}\left(\frac{n-m}{2}\right)$ есть целая часть числа $\frac{n-m}{2}$.

Вычисляя оператор Лапласа от v, получим:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = m(m-1)(x+iy)^{m-2} f(\rho^2, z) + 4m(x+iy)^{m-1} x \frac{\partial f(\rho^2, z)}{\partial(\rho^2)} + \\ + 2(x+iy)^m \frac{\partial f(\rho^2, z)}{\partial \rho^2} + 4x^2(x+iy)^m \frac{\partial^2 f(\rho^2, z)}{\partial(\rho^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -m(m-1)(x+iy)^{m-2} f(\rho^2, z) + 4miy(x+iy)^{m-1} \frac{\partial f(\rho^2, z)}{\partial(\rho^2)} + \\ + 2(x+iy)^m \frac{\partial f(\rho^2, z)}{\partial(\rho^2)} + 4y^2(x+iy)^m \frac{\partial^2 f(\rho^2, z)}{\partial(\rho^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = (x+iy)^m \frac{\partial^2 f(\rho^2, z)}{\partial z^2},$$

откуда

$$\Delta v = (x+iy)^m \left[\frac{\partial^2 f(\rho^2, z)}{\partial z^2} + 4(m+1)\frac{\partial f(\rho^2, z)}{\partial(\rho^2)} + 4\rho^2 \frac{\partial^2 f(\rho^2, z)}{\partial(\rho^2)^2}\right] = \\ = (x+iy)^m \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{4}{(\rho^2)^m} \frac{\partial}{\partial(\rho^2)}\left[\rho^{2(m+1)} \frac{\partial f}{\partial(\rho^2)}\right]\right\}.$$

Подставляя значение $f(\rho^2, z)$, получим:

$$\Delta v = (x+iy)^m \Big[\sum_{j=0}^{(n-m):2} (n-m-2j)(n-m-2j-1) a_j \rho^{2j} z^{n-m-2j-2} + \\ + \sum_{j=1}^{(n-m):2} j(j+m) a_j \rho^{2j-2} z^{n-m-2j}\Big].$$

Заменяя во второй сумме j через $j+1$, получим:

$$\Delta v = (x+iy)^m \Big\{\sum_{j=0}^{(n-m):2} [(n-m-2j)(n-m-2j-1) a_j + \\ + (j+1)(j+m+1) a_{j+1}] \rho^{2j} z^{n-m-2j-2}\Big\}.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\rho^{2j} z^{n-m-2j-2}$, мы получим систему уравнений, из которой все a_j один за другим выражаются через какой-нибудь один из них. Мы получим:

$$a_1 = (-1)\frac{(n-m)(n-m-1)}{(m+1)} a_0,$$

$$a_2 = (-1)^2 \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{(m+1)(m+2)} a_0,$$

. . . .

$$a_{j+1} = (-1)^{j+1} \frac{(n-m)(n-m-1)\dots(n-m-2j-1)}{(j+1)!(m+1)(m+2)\dots(m+j+1)} a_0.$$

Если a_0 вещественно и положительно, то все a_{2j} будут положительны, а все a_{2j+1} отрицательны. Пусть для определённости

$$a_0 = \frac{(n+m)!}{2^m m!(n-m)!}.$$

Нами установлено, таким образом, существование одного и, с точностью до постоянного множителя, только одного гармонического полинома вида

$$v=(x+iy)^m f_{n,\,m}(\rho^2,\ z)$$

для каждого n и $m=0,\ 1,\ \ldots,\ n$.

Присоединяя к ним ещё n полиномов вида

$$(x-iy)^m f_{n,\,m}(\rho^2, z)\ (m=1,\ \ldots,\ n), \tag{XXIX.2}$$

мы получим систему $2n+1$ *гармонических полиномов.*

Нетрудно убедиться в том, что эти полиномы линейно независимы. Принимая за новые независимые переменные $\zeta_1=x+iy$ и $\zeta_2=x-iy$, мы получим в каждом из этих полиномов такой старший относительно ζ_1 или ζ_2 член, который не может встретиться ни в одной линейной комбинации многочленов с меньшими значениями индекса m.

Покажем, что других однородных гармонических многочленов степени n, независимых от данных, не существует.

Любой однородный многочлен $R_n(x,\ y,\ z)$, если ввести в него новые независимые переменные $z,\ \zeta_1=x+iy,\ \zeta_2=x-iy$, будет многочленом относительно z, ζ_1 и ζ_2, а значит, может быть единственным образом представлен в виде:

$$R_n=\varphi_{n,\,0}(\zeta_1\zeta_2,\ z)+\sum_{m=1}^{n}[\zeta_1^m\varphi_{n,\,m}(\zeta_1\zeta_2, z)+\zeta_2^m\varphi_{n,\,m}(\zeta_1\zeta_2, z)]. \tag{XXIX.3}$$

Для этого нужно в полном выражении этого полинома сгруппировать вместе те члены вида $\zeta_0^j\zeta_2^k z^i$, где $j-k=\pm m$.

Отсюда следует, *что любой однородный многочлен степени n единственным образом представляется в виде суммы многочленов по формуле* (XXIX.3).

Применив к многочлену R_n оператор Лапласа, мы получим однородный многочлен степени $(n-2)$, также представляемый единственным образом в виде суммы многочленов по формуле (XXIX.3) с заменой n на $(n-2)$. Если R_n — гармонический полином, то все слагаемые в таком разложении ΔR_n должны, следовательно, обратиться в нуль (из единственности следует, что других способов разложить его, кроме того, при котором все члены равны нулю, не существует). С другой стороны, применяя оператор Лапласа к формуле (XXIX.3) и замечая, что применение оператора Лапласа к многочлену вида (XXIX.1) и (XXIX.2) даёт многочлен того же вида, но с соответственным уменьшением n на две единицы, мы видим, что оператор Лапласа от каждого слагаемого суммы (XXIX.3) порознь равен нулю и, значит, $\varphi_{n,\,m}=cf_{n,\,m}$, что и требовалось доказать.

Продолжая действовать по аналогии с плоским случаем, заменим координаты x, y, z полярными, полагая

$$x = r \sin\theta \cos\varphi,$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi,$$
$$z = r\cos\theta,$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

При этом любой гармонический полином рассмотренного нами типа примет вид

$$r^n e^{\pm im\varphi} f_{n,m}(\sin^2\theta, \quad \cos\theta)\sin^m\theta. \tag{XXIX.4}$$

Пусть

$$f_{n,m}(\sin^2\theta, \quad \cos\theta) = \psi_{n,m}(\cos\theta);$$

нетрудно видеть, что $\psi_{n,m}(\cos\theta)$ есть многочлен от $\cos\theta$, степень которого в точности равна $(n-m)$.

Действительно, каждый член вида

$$a_j z^{n-m-2j}\rho^{2j}$$

заменяется многочленом вида

$$a_j(\cos\theta)^{n-m-2j}\sin^{2j}\theta = a_j(1-\cos^2\theta)^j(\cos\theta)^{n-m-2j},$$

в котором знак при членах, содержащих

$$(\cos\theta)^{n-m-2j},$$

равен $(-1)^k$. В сумме таких многочленов ни одно слагаемое сократиться не может. При этом, очевидно,

$$\psi_{n,m}(1) = a_0 = \frac{(n+m)!}{m!\,2^m(n-m)!}.$$

Полагая

$$\sin^m\theta\psi_{n,m}(\cos\theta) = P_n^{(m)}(\cos\theta), \tag{XXIX.5}$$

мы можем, пользуясь выражением (XXIX.4), выписать полную систему однородных гармонических полиномов от x, y, z степени n в виде

$$\left.\begin{array}{l} r^n P_n^{(0)}(\cos\theta),\quad r^n\sin\varphi P_n^{(1)}(\cos\theta),\quad r^n\sin 2\varphi P_n^{(2)}(\cos\theta),\ \ldots \\ \qquad\ldots,\ r^n\sin n\varphi P_n^{(n)}(\cos\theta); \\ r^n\cos\varphi P_n^{(1)}(\cos\theta),\quad r^n\cos 2\varphi P_n^{(2)}(\cos\theta),\ \ldots \\ \qquad\ldots,\ r^n\cos n\varphi P_n^{(n)}(\cos\theta). \end{array}\right\} \tag{XXIX.6}$$

Функции (XXIX.6) служат пространственным аналогом функций

$$\rho^n\cos n\varphi, \quad \rho^n\sin n\varphi,$$

являющихся решениями плоской задачи о гармонических полиномах, а функции

$$\left.\begin{array}{l}\sin m\varphi P_n^{(m)}(\cos\theta),\\ \cos m\varphi P_n^{(m)}(\cos\theta),\end{array}\right\} \qquad \text{(XXIX.7)}$$

— аналогом тригонометрических функций кратного аргумента, т. е. $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$. Эти функции или их линейные комбинации принято называть сферическими гармониками порядка n.

§ 2. Приближение при помощи сферических функций.

Теорема 1. *Линейной комбинацией функций* (XXIX.7) *порядков* 0, 1, ..., N *можно с любой точностью, в смысле равномерной сходимости, представить произвольную непрерывную функцию на сфере радиуса* 1, *если* N *достаточно велико.*

Для того чтобы доказать эту теорему, установим сначала несколько вспомогательных предложений.

Лемма 1. *Произвольная функция* $F(\theta, \varphi)$ *на поверхности сферы радиуса* 1, *непрерывная на ней, может быть представлена со сколь угодно большой точностью в виде многочлена:*

$$Q(x, y, z) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} a_{klm}x^k y^l z^m.$$

Доказательство. Составим выражение:

$$Q_N = \frac{N+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N F(\theta_1, \varphi_1)\sin\theta_1\, d\theta_1\, d\varphi_1,$$

где $\cos\gamma$ обозначает косинус угла между вектором

$$x = \sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = \sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = \cos\theta$$

и вектором

$$x_1 = \sin\theta_1\cos\varphi_1,$$
$$y_1 = \sin\theta_1\sin\varphi_1,$$
$$z_1 = \cos\theta_1.$$

Имеем

$$\cos\gamma = xx_1 + yy_1 + zz_1.$$

Легко установить, что Q_N есть полином степени N от x, y, z. Докажем, с другой стороны, что

$$Q_N - F = \varepsilon(N)$$

равномерно стремится к нулю при N, стремящемся к бесконечности.

Рассмотрим интеграл

$$\frac{N+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N F(\theta,\ \varphi)\sin\theta_1\,d\theta_1\,d\varphi_1 =$$

$$= \frac{N+1}{4\pi}F(\theta,\ \varphi)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N \sin\theta_1\,d\theta_1\,d\varphi_1$$

Пусть S — поверхность шара радиуса 1. Величина

$$\frac{N+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N \sin\theta_1\,d\theta_1\,d\varphi_1 =$$

$$= \frac{N+1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N dS$$

не зависит от точки $(\theta,\ \varphi)$. Следовательно, вычисляя её, можно положить $\theta = 0$. При этом $\cos\gamma = \cos\theta_1$, и интеграл запишется так:

$$\frac{N+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos\theta_1}{2}\right)^N \sin\theta_1\,d\theta_1\,d\varphi_1 =$$

$$= -\frac{N+1}{4\pi}\,4\pi\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos\theta_1}{2}\right)^N d\left(\frac{1+\cos\theta_1}{2}\right) =$$

$$= -\left(\frac{1+\cos\theta_1}{2}\right)^{N+1}\Bigg|_0^{\pi} = 1.$$

Значит,

$$\frac{N+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N F(\theta,\ \varphi)\sin\theta_1\,d\theta_1\,d\varphi_1 = F(\theta,\ \varphi).$$

Далее,

$$Q_N - F(\theta,\ \varphi) =$$

$$= \frac{N+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N [F(\theta_1,\ \varphi_1) - F(\theta,\ \varphi)]\sin\theta_1\,d\theta_1\,d\varphi_1.$$

Разобьём последний интеграл на два слагаемых, выделив вокруг точки $(\theta,\ \varphi)$ область на сфере $\gamma < \delta$, так, чтобы иметь

$$|F(\theta,\ \varphi) - F(\theta_1,\ \varphi_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для точек $(\theta_1,\ \varphi_1)$, принадлежащих области $\gamma < \delta$.

Функция $F(\theta, \varphi)$, в силу своей непрерывности, ограничена, значит,

$$|F(\theta, \varphi)| \leqslant M.$$

Возьмём теперь N настолько большим, чтобы удовлетворить неравенству

$$(N+1)\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^N < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

При этом, очевидно,

$$(N+1)\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N < \frac{\varepsilon}{4M} \quad \text{для} \quad \gamma \geqslant \delta.$$

Для таких N

$$|Q_N - F| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N+1}{4\pi} \iint\limits_{\gamma \geqslant \delta} \left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N |F(\theta, \varphi) - F(\theta_1, \varphi_1)| \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1 +$$

$$+ \frac{N+1}{4\pi} \iint\limits_{\gamma < \delta} \left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N |F(\theta, \varphi) - F(\theta_1, \varphi_1)| \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N+1}{4\pi} 2M \iint\limits_{\gamma \geqslant \delta} \left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N dS + \frac{\varepsilon}{2} \frac{N+1}{4\pi} \iint\limits_{\gamma < \delta} \left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N dS \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Наша лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $Q_k(x, y, z)$ — совершенно произвольный многочлен от переменных x, y, z степени k. Тогда существует гармонический полином $P_k(x, y, z)$ степени не выше k, принимающий на сфере $x^2+y^2+z^2=1$ те же значения, что и $Q_k(x, y, z)$.*

Доказательство. По доказанному выше многочлен $Q_k(x, y, z)$ может быть представлен в виде

$$Q_k = q_0(\rho^2, z) + \sum_{m=1}^{k} [(x+iy)^m q_{1,m}(\rho^2, z) + (x-iy)^m q_{2,m}(\rho^2, z)]$$

[см. (XXIX.3)].

Значит, на сфере $x^2+y^2+z^2=1$ будем иметь:

$$Q_k = \tau_0(\cos\theta) + \\ + \sum_{m=1}^{k} \sin^m\theta \, [\cos m\varphi \tau_{1,m}(\cos\theta) + \sin m\varphi \tau_{2,m}(\cos\theta)], \quad \text{(XXIX.8)}$$

где $\tau_0(\cos\theta)$ — многочлен степени не выше k от $\cos\theta$, а многочлены $\tau_{1,m}$ и $\tau_{2,m}$ суть многочлены степени не выше $k-m$ от $\cos\theta$.

Но величина $\tau_0(\cos\theta)$ может, очевидно, быть представлена в виде

$$\tau_0(\cos\theta) = \sum_{j=0}^{k} c_j P_j^{(0)}(\cos\theta), \qquad \text{(XXIX.9)}$$

а каждая из величин $\sin^m\theta\tau_{1,m}$ и $\sin^m\theta\tau_{2,m}$ может быть представлена в виде

$$\left.\begin{aligned} \sin^m\theta\tau_{1,m}(\cos\theta) &= \sum_{n=m}^{k} c_{n,m}^{(1)} P_n^{(m)}(\cos\theta), \\ \sin^m\theta\tau_{2,m}(\cos\theta) &= \sum_{n=m}^{k} c_{n,m}^{(2)} P_n^{(m)}(\cos\theta). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXIX.10)}$$

Коэффициенты этих разложений могут быть найдены один за другим, начиная со старшего, ибо степень каждого $P_n^{(m)}(\xi)$ возрастает на единицу вместе с номером n.

Подставляя (XXIX.9) и (XXIX.10) в (XXIX.8), мы сразу доказываем нашу лемму. Из лемм 1 и 2 немедленно следует теорема 1. В самом деле, произвольная непрерывная функция с любой точностью может быть на сфере заменена многочлёном по лемме 1. По лемме 2 этот многочлен заменяется сразу гармоническим многочленом.

§ 3. Задача Дирихле для шара.

Доказанная теорема даёт нам новый способ решения задачи Дирихле для шара. Мы знаем из предыдущих лекций, что эта задача всегда имеет непрерывное решение и что если мы заменим предельные значения функции

$$u|_S = \varphi$$

приближёнными φ', так что

$$|\varphi - \varphi'| < \varepsilon,$$

то решение уравнения

$$\Delta u = 0$$

при условии

$$u|_S = \varphi'$$

отличается не больше, чем на ε, от решения этого же уравнения при условии $u|_S = \varphi$.

Взяв за φ' линейную комбинацию сферических функций, мы сразу найдём решение задачи в виде суммы соответствующих многочленов. Это и будет приближённым решением задачи Дирихле. В конце лекции мы дадим явное выражение точного решения через сферические функции.

§ 4. Дифференциальные уравнения для сферических функций.

Пусть $Y_n(\theta, \varphi)$ — какая-то сферическая гармоника порядка n. Произведение

$$r^n Y_n(\theta, \varphi)$$

есть гармонический полином. Следовательно,

$$\Delta r^n Y_n(\theta, \varphi) = 0.$$

Пользуясь выражением для оператора Лапласа в полярных координатах [см. (XXVIII.7)], получим:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial}{\partial r}(r^n Y_n(\theta, \varphi))\right] + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}(r^n Y_n(\theta, \varphi))\right] + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}[r^n Y_n(\theta, \varphi)] = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2} + n(n+1)Y_n = 0. \quad \text{(XXIX.11)}$$

Уравнение (XXIX.11) получается из уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0 \quad \text{(XXIX.12)}$$

при

$$\lambda = n(n+1). \quad \text{(XXIX.13)}$$

Обозначим оператор

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

действующий на функцию $\chi(\theta, \varphi)$, определённую на поверхности единичной сферы, через D. Уравнение (XXIX.12) запишется при этом в виде:

$$DY + \lambda Y = 0. \quad \text{(XXIX.14)}$$

Оператор D на первый взгляд зависит от того, как выбран полюс сферы. Однако на самом деле он остаётся неизменным при всевозможном выборе координат θ и φ на этой сфере. Действительно, пусть функция $\chi(\theta, \varphi)$ задана как-нибудь на сфере. Будем считать её заданной во всём пространстве r, θ, φ и не зависящей от r. Тогда

$$D(\chi(\theta, \varphi)) = r^2\Delta\chi.$$

Оператор Лапласа, стоящий в правой части, не зависит от выбора координатных осей, значит и оператор D не будет зависеть от этого выбора, что и требовалось доказать.

Длина дуги некоторой линии на сфере ds выражается с помощью соотношения

$$ds = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2,$$

или

$$ds^2 = h_1^2\, d\theta^2 + h_1^2 d\varphi^2, \quad \text{где} \quad h_1 = 1, \quad h_2 = \sin\theta.$$

Оператор D выражается через h_1 и h_2 формулой

$$D\chi = \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial\chi}{\partial\theta} + \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}$$

по аналогии с формулой (XXVIII.6), выражающей оператор Лапласа в криволинейных координатах. Выражение $D\chi$ называют поэтому оператором Лапласа на поверхности сферы.

Уравнение (XXIX.12) может иметь нетривиальное решение, непрерывное на всей поверхности сферы, не при всяком значении λ. Задача об отыскании таких значений λ и самих этих решений аналогична задаче об отыскании решений уравнения

$$y'' + \lambda y = 0,$$

непрерывных на окружности. Эта последняя задача была рассмотрена нами в лекции XX. Поставленная нами сейчас задача может быть приведена к теории интегральных уравнений при помощи функции Грина. Остановимся подробнее на этом вопросе. Будем искать решение уравнения

$$Dv = \psi(\theta, \varphi) \qquad \text{(XXIX.15)}$$

на сфере. Заметим, что соответствующее однородное уравнение

$$Du = 0 \qquad \text{(XXIX.16)}$$

имеет нетривиальное решение $u \equiv 1$. Поэтому задача об отыскании решения (XXIX.15) разрешима не всегда.

Назовём функцией Грина для уравнения (XXIX.15) функцию двух переменных точек сферы:

$$G = \frac{1}{2\pi}\lg\sin\frac{\gamma}{2},$$

где через γ обозначено угловое расстояние между рассматриваемыми точками. Из сферической тригонометрии известно выражение для $\cos\gamma$:

$$\cos\gamma = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

где θ_1, φ_1 — координаты одной из точек, а θ_2, φ_2 — координаты другой точки. Докажем, что если функция ψ удовлетворяет условию

$$\int\int_S \psi\, dS = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \psi \sin\theta\, d\varphi\, d\theta = 0, \qquad \text{(XXIX.17)}$$

то решение уравнения (XXIX.15), удовлетворяющее тому же условию

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} v\sin\theta\,d\varphi\,d\theta = 0, \qquad \text{(XXIX.17')}$$

даётся формулой

$$v(\theta_0, \varphi_0) = \\ = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} G(\theta, \varphi, \theta_0, \varphi_0)\psi(\theta, \varphi)\sin\theta\,d\varphi\,d\theta = \iint_S G\psi\,dS, \qquad \text{(XXIX.18)}$$

где через dS обозначен элемент поверхности сферы. Этим будет оправдано данное нами функции G название.

Пусть решение уравнения (XXIX.15) существует. Выберем за точку θ_0, φ_0 полюс сферы. Мы будем иметь:

$$\iint_S G\psi\,dS = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} GDv\sin\theta\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi} GDv\,d\varphi\right)\sin\theta\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \lg\sin\frac{\theta}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\,d\varphi\right] + \frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}d\varphi\right\}d\theta =$$

$$= -\int_0^{\pi}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\,d\varphi\right]\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}d\theta +$$

$$+ \left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\,d\varphi\right)\lg\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin\theta\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\,d\varphi\right]d\theta - \left(\cos^2\frac{\theta}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\,d\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi}.$$

В силу условия (XXIX.17) получим:

$$\iint_S G\psi\,ds = v\,|_{\theta=0}. \qquad \text{(XXIX.19)}$$

Из соображений симметрии отсюда следует справедливость формулы (XXIX.18) для любой точки сферы. Можно доказать также, что если ψ — произвольная функция, удовлетворяющая условию (XXIX.17), то функция $v(\theta_0, \varphi_0)$, определяемая равенством (XXIX.18), даёт нам решение уравнения

$$Dv = \psi.$$

Доказательство этого предложения аналогично тому, которое мы проводили неоднократно, и мы его опускаем. Функция Грина, построенная нами, является симметрической функцией, и поэтому к уравнению

$$u = \lambda \int\limits_S \int G u \, dS,$$

эквивалентному (XXIX.4), применима вся теория интегральных уравнений с симметрическим ядром.

Если мы поставим себе задачу — найти все регулярные решения уравнения (XXIX.12) на сфере, то из сказанного вытекает, что значения (XXIX.13) будут собственными значениями.

Каждое собственное значение имеет $(2n+1)$ собственных функций. Мы получили выше, в формуле (XXIX.7), набор решений уравнения (XXIX.12). Из общей теории интегральных уравнений вытекает, что те из функций (XXIX.7), которые отвечают различным значениям n, ортогональны. Решения (XXIX.7) с одинаковыми значениями n ортогональны в силу того, что в промежутке $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ ортогональны все синусы и косинусы кратных дуг. Отсюда следует ортогональность всех функций (XXIX.7).

Теорема 2. *Функции* (XXIX.7) *исчерпывают всё множество собственных функций уравнения* (XXIX.12).

Доказательство. Пусть $Y^*(\theta, \varphi)$ есть какая-то собственная функция (XXIX.12), отличная от (XXIX.7), и пусть $u_i(\theta, \varphi)$ есть множество функций (XXIX.7), каким-то образом перенумерованное. По теореме 1 функция $Y^*(\theta, \varphi)$ может быть представлена в виде

$$Y^*(\theta, \varphi) = \sum_{i=1}^{N} c_i^{(N)} u_i(\theta, \varphi) + \eta_N,$$

где η_N сколь угодно мало.

Значит,

$$\int\limits_S \int \left[Y^*(\theta, \varphi) - \sum_{i=1}^{N} c_i^{(N)} u_i(\theta, \varphi)\right]^2 ds = \int\limits_S \int \eta_N^2 \, dS < \varepsilon(N).$$

Пусть

$$y_i = \int\limits_S \int Y^*(\theta, \varphi) u_i(\theta, \varphi) \, dS.$$

Тогда

$$\int\limits_S \int \left(Y^*(\theta, \varphi) - \sum_{i=1}^{N} y_i u_i(\theta, \varphi)\right)^2 dS \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_S \int \left(Y^*(\theta, \varphi) - \sum_{i=1}^{N} c_i^{(N)} u_i(\theta, \varphi)\right)^2 dS.$$

Принимая во внимание ортогональность $Y^*(\theta, \varphi)$ со всеми $u_i(\theta, \varphi)$, которая следует из общей теории интегральных уравнений, и вытекающее из этого равенство

$$y_i = 0,$$

получим:

$$\iint_S [Y^*(\theta, \varphi)]^2 dS < \varepsilon$$

при произвольном $\varepsilon > 0$. Значит, $Y^*(\theta, \varphi) = 0$, что и требовалось доказать.

Из теоремы 2 сразу следует возможность представления любой функции $\varphi(S)$ с интегрируемым квадратом по сфере, т. е. для всякой функции, удовлетворяющей условию

$$\iint_S \varphi^2(S)\, dS < \infty,$$

в виде сходящегося в среднем ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i u_i,$$

где

$$\varphi_i = \iint_S \varphi u_i\, dS.$$

Сходимость ряда будет равномерной, в силу теоремы Гильберта-Шмидта, если φ имеет непрерывные вторые производные.

Подставим в уравнение (XXIV.12) функцию (XXIX.7). Пользуясь тем, что

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\left[\sin m\varphi P_n^{(m)}(\cos\theta)\right] = -m^2 \sin m\varphi P_n^{(m)}(\cos\theta),$$

мы будем иметь:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\,\frac{\partial P_n^{(m)}(\cos\theta)}{\partial\theta}\right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] P_n^{(m)}(\cos\theta) = 0. \qquad \text{(XXIX.20)}$$

Уравнение (XXIX.20) есть дифференциальное уравнение для функций $P_n^{(m)}(\cos\theta)$. Обозначим:

$$\cos\theta = \mu.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = -\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\mu},$$

и уравнение (XXIX.21) переписывается так:

$$\frac{d}{d\mu}\left[\sin^2\theta\,\frac{dP_n^{(m)}(\mu)}{d\mu}\right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] P_n^{(m)}(\mu) = 0,$$

или

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\,\frac{dP_n^{(m)}(\mu)}{d\mu}\right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right] P_n^{(m)}(\mu) = 0. \qquad \text{(XXIX.21)}$$

Полученное дифференциальное уравнение есть линейное уравнение 2-го порядка. Оно получается из уравнения

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dy}{d\mu}\right]+\left[\lambda_1-\frac{\lambda_2}{1-\mu^2}\right]y=0$$

при $\lambda_1=n(n+1)$ и $\lambda_2=m^2$.

Если мы поставим задачу найти такие λ_1 и λ_2, при которых решение этого последнего уравнения ограничено, то можно утверждать, что при $\lambda_2=m^2$ никаких других собственных значений, кроме $\lambda_1=n(n+1)$, оно не будет допускать. Это вытекает из того, что мы имели бы в противном случае собственную функцию y^* уравнения (XXIX.21) и соответственно собственную функцию для (XXIX.12) в виде $P^*(\cos\theta)\sin m\varphi$, отличную от всех функций (XXIX.7), что, по доказанному, невозможно.

Полученные нами соотношения позволяют поставить вопрос о решении уравнения Лапласа для шара по методу разделения переменных. Более того, мы фактически уже провели этот метод, исходя из других предпосылок.

Разделяя переменные в уравнении Лапласа

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,$$

мы будем иметь после простых выкладок, которые мы предоставляем читателю:

$$u=\sum_{\substack{n,\,m\\ m\leqslant n}} r^n P_n^{(m)}(\cos\theta)\,[a_n^{(m)}\cos m\varphi+b_n^{(m)}\sin m\varphi],$$

где $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$ суть решения уравнения

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+m^2\Phi=0.$$

$P_n^{(m)}$ — решение уравнения (XXIX.20) или (XXIX.21) а r^n — решение уравнения

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-n(n+1)R=0.$$

ЛЕКЦИЯ XXX.

НЕКОТОРЫЕ ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

§ 1. Представление полиномов Лежандра.

Разберём некоторые свойства сферических функций.

Теорема 1. *Решением уравнения*

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dy}{d\mu}\right]+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right)y=0$$

служит функция

$$P_n^{(m)}(\mu)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{n+m}(1-\mu^2)^n}{d\mu^{n+m}}. \qquad \text{(XXX.1)}$$

Доказательство. Пусть $(1-\mu^2)^n=\Phi$. Непосредственно легко проверить формулу

$$(1-\mu^2)\frac{d^2\Phi}{d\mu^2}+2(n-1)\mu\frac{d\Phi}{d\mu}+2n\Phi=0.$$

Дифференцируя её $m+n$ раз по μ с помощью известного правила Лейбница, получим:

$$(1-\mu^2)\frac{d^{m+n+2}\Phi}{d\mu^{m+n+2}}-2(m+1)\mu\frac{d^{m+n+1}\Phi}{d\mu^{m+n+1}}+$$

$$+(n-m)(n+m+1)\frac{d^{n+m}\Phi}{d\mu^{n+m}}=0,$$

или, полагая

$$\frac{d^{m+n}\Phi}{d\mu^{m+n}}=\psi,$$

$$(1-\mu^2)\psi''-2(m+1)\mu\psi'+(n-m)(n+m+1)\psi=0.$$

Далее, пусть

$$P_n^{(m)}(\mu)=C(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}\psi,$$

откуда прямой подстановкой получаем:

$$(1-\mu^2)\frac{d^2P_n^{(m)}}{d\mu^2}-2\mu\frac{dP_n^{(m)}}{d\mu}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]P_n^{(m)}=$$

$$=C(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}\left[(1-\mu^2)\psi''-2(m+1)\mu\psi'+(n-m)(n+m+1)\psi\right]=0,$$

что и требовалось доказать.

Формула (XXX.1) даёт нам, очевидно, новое явное выражение для $P_n^{(m)}(\cos\theta)$, ибо $r^n \sin m\varphi P_n^{(m)}$ есть гармонический полином, а двух полиномов такого вида быть не может.

Из этой формулы можно получить ряд удобных рекуррентных формул для вычисления функций $P_n^{(m)}(\cos\theta)$.

Многочлены

$$P_n^{(0)}(\mu)=P_n(\mu)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n(1-\mu^2)^n}{d\mu^n}$$

носят особое название *полиномов Лежандра*. Среди других сферических функций они играют особую роль.

Строго говоря, мы не имеем пока права обозначать через $P_n^{(m)}(\mu)$ функцию (XXX.1), которая может отличаться от введённой нами ранее функции $P_n^{(m)}(\mu)$ постоянным множителем. Однако легко установить, что множитель этот есть единица. Из формулы (XXX.1) следует, что

$$P_n(1)=1. \qquad \text{(XXX.2)}$$

В самом деле, положим $\mu-1=z$; тогда

$$(1-\mu^2)^n=(-1)^n z^n(2+z)^n=(-1)^n(2^n z^n+\ldots),$$

откуда сразу и вытекает (XXX.2).

Если

$$\frac{P_n^{(m)}(\cos\theta)}{\sin^m\theta}=\psi_{n,m},$$

то аналогично

$$\psi_{n,m}(1)=\frac{(n+m)!}{2^m m!(n-m)!},$$

что и доказывает наше утверждение.

§ 2. Производящая функция

Теорема 2. *Разложение функции*

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}$$

по степеням r имеет вид

$$\frac{1}{r_1}=\sum_{n=0}^{\infty}r^nP_n(\cos\theta). \qquad \text{(XXX.3)}$$

Функция $\frac{1}{r_1}$ *называется поэтому производящей функцией полиномов Лежандра.*

Эту теорему можно было бы доказать непосредственно, подсчитывая коэффициенты разложения, но можно установить её и другим путём.

Рассматривая функцию $\frac{1}{r_1}$ в некоторой сфере $r \leqslant \rho \leqslant 1$, мы можем разложить её в ряд по степеням r, причём коэффициенты, очевидно, будут многочленами от $\cos\theta$, т. е.

$$\frac{1}{r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Q_n(\cos\theta).$$

В самом деле,

$$1 - 2r\cos\theta + r^2 = (1 - re^{i\theta})(1 - re^{-i\theta}), \tag{XXX.4}$$

откуда сразу следует, что наше разложение будет иметь радиус сходимости, равный единице. Значит, при $r = \rho$

$$\frac{1}{r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n Q_n(\cos\theta). \tag{XXX.5}$$

По доказанному в прошлой лекции, гармоническую функцию, принимающую на поверхности $r = \rho$ заданные значения (XXX.5), можно разложить в равномерно сходящийся ряд:

$$\frac{1}{r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta).$$

Из единственности разложения производящей функции в степенной ряд по r вытекает, что

$$Q_n(\cos\theta) = a_n P_n(\cos\theta).$$

Для того чтобы определить величину a_n, заметим, что при $\cos\theta = 1$ имеем:

$$(1 - 2r\cos\theta + r^2)_{\theta=0} = (1 - r)^2$$

и

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n.$$

Сравнивая это с выражением $\frac{1}{r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n P_n(1)$, имеем:

$$a_n = 1.$$

Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Имеют место равенства*

$$\frac{1}{\sqrt{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}}=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta), & r<R;\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{R^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta), & r>R.\end{cases} \tag{XXX.6}$$

В самом деле,

$$\frac{1}{\sqrt{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}}=\frac{1}{R}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r}{R}\cos\theta+\left(\frac{r}{R}\right)^2}}=$$
$$=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{R}{r}\cos\theta+\left(\frac{R}{r}\right)^2}},$$

откуда и следует (XXX.6).

Следствие 2. *Справедливо соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\sqrt{\rho^2-2\rho r\cos\theta+r^2}}=-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{r^n}{\rho^{n+2}}P_n(\cos\theta);\ r<\rho. \tag{XXX.7}$$

Заметим ещё, что сходимость рядов (XXX.6) и (XXX.7) будет равномерной относительно переменного θ, если, соответственно, $R-r>\varepsilon$, $r-R>\varepsilon$ или $\rho-r>\varepsilon$, при фиксированном R.

Для того чтобы доказать это утверждение, рассмотрим ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1-r}}=1+\frac{1}{2}r+\frac{1}{4}r^2+\ldots \tag{XXX.8}$$

Все члены этого ряда по абсолютной величине равны соответствующим членам рядов

$$\frac{1}{\sqrt{1-re^{i\theta}}}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n,\qquad \frac{1}{\sqrt{1-re^{-i\theta}}}=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{a}_nr^n. \tag{XXX.9}$$

Следовательно, члены ряда

$$\frac{1}{1-r}=\frac{1}{\sqrt{1-r}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-r}}=1+r+r^2+\ldots,$$

который можно получить почленным умножением ряда (XXX.8) на самого себя, по абсолютной величине будут не меньше соответствующих членов ряда

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-re^{i\theta}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-re^{-i\theta}}}=\sum_{n=0}^{\infty}r^nP_n(\cos\theta),$$

получаемого почленным умножением рядов (XXX.9) друг на друга.

27 Зак. 1956. С. Л. Соболев.

Таким образом, мы получаем неравенство

$$P_n(\cos\theta) \leqslant 1,$$

причём знак равенства может иметь место лишь при $\theta = 0$, т. е. при $\cos\theta = 1$, как легко видеть из доказательства. Отсюда и вытекает наше утверждение о равномерной сходимости.

§ 3. Формула Лапласа.

Пусть теперь $r^n Y_n(\theta, \varphi)$ — некоторый гармонический полином. Применяя к нему формулу Грина, получаем:

$$r^n Y_n(\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\rho=1} \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n} \rho^n Y_n(\theta_1, \varphi_1) - \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial n} (\rho^n Y_n(\theta_1, \varphi_1)) \right\} dS_1, \tag{XXX.10}$$

где

$$r_1 = \sqrt{r^2 - 2r\rho\cos\gamma + \rho^2},$$

а dS_1 обозначает элемент поверхности сферы в координатах ϑ_1, φ_1; $r < \rho$ есть расстояние между точками $M(r, \theta, \varphi)$ и $M(\rho, \theta_1, \varphi_1)$, а γ есть угол между вектором, проведённым в точку M, и вектором, проведённым в точку M_1 из начала координат.

Очевидно,

$$\begin{aligned} r\rho\cos\gamma &= \\ &= r\sin\theta\cos\varphi\rho\sin\theta_1\cos\varphi_1 + r\sin\theta\sin\varphi\rho\sin\theta_1\sin\varphi_1 + r\cos\theta\rho\cos\theta_1 = \\ &= r\rho(\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi - \varphi_1)). \end{aligned}$$

Подставляя в формулу (XXX.8) вместо $\frac{1}{r_1}$ и

$$\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n} = -\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \rho}$$

их выражения (XXX.6) и (XXX.7), будем иметь:

$$\begin{aligned} r^n Y_n(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\rho=1} Y_n(\theta_1, \varphi_1) \Bigg[\rho^n (n+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{\rho^{k+2}} P_k(\cos\gamma) + \\ + n\rho^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{\rho^{k+1}} P_k(\cos\gamma) \Bigg] \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1 = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n(\theta_1, \varphi_1)(2n+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} r^k P_k(\cos\gamma) \right] \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1. \end{aligned}$$

Очевидно, что функция $P_j(\cos\gamma)$ при $j \neq n$ ортогональна к функции $Y_n(\theta, \varphi)$, так как они будут гармониками разных порядков. Интегрируя ряд почленно, что возможно благодаря его сходимости в среднем, и замечая, что в нем пропадают все слагаемые, кроме одного, получим:

$$r^n Y_n(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^n Y_n(\theta_1, \varphi_1) P_n(\cos\gamma) \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1,$$

т. е.

$$Y_n(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_n(\theta_1, \varphi_1) P_n(\cos\gamma) \, d\theta_1 \, d\varphi_1. \qquad \text{(XXX.11)}$$

Формула (XXX.11) позволяет сразу получать коэффициенты разложения данной функции $F(\theta, \varphi)$ по сферическим гармоникам.

Пусть

$$F(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi). \qquad \text{(XXX.12)}$$

Умножая обе части формулы (XXX.12) на $P_k(\cos\gamma)$ и интегрируя по сфере, получим:

$$\frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\theta_1, \varphi_1) P_k(\cos\gamma) \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1 = Y_k(\theta, \varphi). \qquad \text{(XXX.13)}$$

Формула (XXX.13) носит название формулы Лапласа.

Формула Лапласа даёт возможность явно написать решение задачи Дирихле в шаре в виде ряда по гармоническим полиномам. В самом деле, умножая каждую гармонику порядка k на r^k и складывая, мы можем получить гармоническую функцию, принимающую на границе шара заданные значения $F(\vartheta, \varphi)$. Мы получаем решение в следующем виде:

$$u(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) r^k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\vartheta_1, \varphi_1) P_k(\cos\gamma) \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1.$$

Заканчивая изложение теории сферических функций, приведём без доказательства ещё несколько формул, которые часто могут быть полезными:

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(\mu)]^2 d\mu = \frac{2}{2n+1}, \qquad \text{(XXX.14)}$$

$$\int_{-1}^{+1} [P_n^{(m)}(\mu)]^2 d\mu = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!},$$

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu) P_{n'}(\mu) d\mu = 0, \quad \int_{-1}^{+1} P_n^{(m)}(\mu) P_{n'}^{(m)}(\mu) d\mu = 0,$$

$$n \neq n'.$$

Формулы (XXX.12) позволяют непосредственно вычислить коэффициенты разложения функции в ряд по сферическим функциям вида (XXIX.7).

Отметим, наконец, асимптотическое представление для полиномов Лежандра при больших значениях n:

$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin\theta}} \left\{ \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4} \right] + \varepsilon_n \right\},$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно относительно θ при $\varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon$.

Мы заканчиваем на этом первоначальный курс уравнений математической физики, посвящённый выяснению основных качественных свойств этих уравнений и классическим методам их решения.

Современное состояние математической физики, конечно, далеко не исчерпывается этим. Так, вне рамок нашего курса остались ещё следующие важнейшие вопросы, которые могут составить содержание по крайней мере такой же книги:

1. Задачи математической физики для неограниченных сред и применение интегрального преобразования Фурье.

2. Специальные задачи для сред полуограниченных, диффракция волн и т. п.

3. Вариационные методы в математической физике.

4. Приближённое решение задач математической физики методом конечных разностей.

К числу этих важнейших вопросов следует отнести ещё теорию нелинейных уравнений.

Рамки нашего курса не позволили нам остановиться на этих вопросах. Однако внимательный читатель, познакомившись в этих лекциях с основными идеями теории уравнений математической физики, сумеет, мы надеемся, самостоятельно проникнуть в современные книги и журнальные статьи, посвящённые этим вопросам.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ